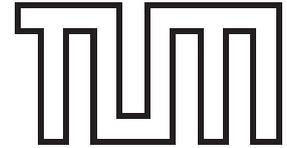


Technische Universität München  
Physik Department  
Institut für Theoretische Physik T30d  
Univ.-Prof. Dr. M. Lindner



# Der chirale Phasenübergang im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe

Johannes Manus

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

*Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)*

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Stephan Paul

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Manfred Lindner
2. Univ.-Prof. Dr. Wolfram Weise

Die Dissertation wurde am 15. März 2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 18. April 2000 angenommen.



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Thermale Quantenfeldtheorie und kritische Phänomene</b>	<b>9</b>
2.1	Thermale Feldtheorie in der Realzeit-Formulierung . . . . .	9
2.2	Die wilsonsche Renormierungsgruppe . . . . .	18
2.2.1	Die Blockspin-Renormierungsgruppe . . . . .	21
2.2.2	Die kontinuierliche Renormierungsgruppe . . . . .	23
2.3	Statistische Physik und Quantenfeldtheorie . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Die wilsonsche Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie</b>	<b>27</b>
3.1	Euklidische Formulierung: Die exakte Renormierungsgruppe . . . . .	27
3.2	Die thermale Renormierungsgruppe . . . . .	31
3.2.1	Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe . . . . .	32
3.2.2	Ableitung der Flussgleichungen für die greenschen Funktionen . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Der chirale Phasenübergang im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe</b>	<b>45</b>
4.1	Das chirale Quark-Meson-Modell . . . . .	45
4.2	Die Flussgleichungen für das chirale Quark-Meson-Modell . . . . .	53
4.3	Numerische Untersuchung des Modells . . . . .	60
4.4	Entkopplung fermionischer Freiheitsgrade . . . . .	73
4.5	Vergleich mit anderen Arbeiten . . . . .	78
4.5.1	Chirale Störungstheorie . . . . .	79
4.5.2	Die exakte Renormierungsgruppe . . . . .	80
4.5.3	Gitter-QCD . . . . .	80
4.5.4	Vergleich der Resultate . . . . .	81
4.6	Ausblick . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Die thermalen Flussgleichungen</b>	<b>89</b>
A.1	Die dimensionsbehafteten Flussgleichungen . . . . .	89
A.2	Die dimensionslosen Flussgleichungen . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Eigenschaften der Superspur</b>	<b>99</b>

<b>C Anwendung der Renormierungsgruppe auf Top-Quark Kondensation</b>	<b>103</b>
C.1 Renormierungsgruppen-Formulierung . . . . .	103
C.2 Höherdimensionale Operatoren . . . . .	106
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>
<b>Danksagung</b>	<b>117</b>

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	Grafische Darstellung der Matsubara-Kontur. . . . .	14
2.2	Grafische Darstellung der Realzeit-Kontur. . . . .	15
2.3	Grafische Darstellung der CTP-Kontur. . . . .	18
2.4	Schematische Darstellung der Blockspin-Transformation. . . . .	22
3.1	Beispiel einer Cut-off-Funktion. . . . .	29
4.1	Dispersionsrelationen der fermionischen Freiheitsgrade in HTL-Approximation. . . . .	50
4.2	Die thermale Fermion-Masse als Funktion der Kopplungen. . . . .	53
4.3	Die Yukawa-Kopplung bei $T_c$ als Funktion der ( $T = 0$ )-Kopplungen. . . . .	54
4.4	Das Laufen des dimensionslosen Vakuum Erwartungswertes. . . . .	65
4.5	Skalenverhalten der dimensionslosen Kopplungen sehr nahe am Phasenübergang. . . . .	66
4.6	Das Laufen des dimensionsbehafteten Vakuum Erwartungswertes. . . . .	67
4.7	Das effektive Potenzial bei verschiedenen Temperaturen. . . . .	68
4.8	Vakuum Erwartungswert und Sigma-Masse als Funktion der Temperatur. . . . .	69
4.9	Das Laufen der Yukawa-Kopplung mit dem Skalenparameter $t$ . . . . .	70
4.10	Vergleich des perturbativen und des TRG-Resultats der kritischen Temperatur. . . . .	72
4.11	Die kritische Temperatur als Funktion der Yukawa-Kopplung. . . . .	73
4.12	Relative Differenz der kritischen Temperatur. Unserer Ergebnisse im Vergleich zur Störungstheorie. . . . .	74
4.13	Entkopplung der fermionischen Freiheitsgrade. . . . .	76
4.14	Laufen der dimensionslosen thermalen Fermionmasse. . . . .	77
4.15	Die Temperaturabhängigkeit des chiralen Kondensats. . . . .	82



## TABELLENVERZEICHNIS

2.1	Übersetzungstabelle zwischen QFT und statistischer Physik. . . . .	23
2.2	Vergleich kritischer Exponenten in Theorie und Experiment. . . . .	25
4.1	Die kritischen Exponenten des $O(4)$ -Modells . . . . .	71
4.2	Die kritische Temperatur in Zwei-Flavour-QCD. . . . .	81



# 1. EINLEITUNG

Die letzten Jahre in der Elementarteilchen-Forschung können als “Erfolgsgeschichte” des Standardmodells bezeichnet werden. So haben die Untersuchungen elektroschwacher Observablen am LEP-Beschleuniger und am Tevatron zu einer beeindruckenden Übereinstimmung von theoretischen Vorhersagen und experimentellen Ergebnissen zu verschiedensten Aspekten der Theorie geführt. Wir wollen in dieser Einleitung zunächst eine kurze Übersicht über den “Stand der Dinge” geben und dann erläutern, in welchem Zusammenhang diese Arbeit gesehen werden sollte.

Mittlerweile wurden fast alle vom Standardmodell vorhergesagten Elementarteilchen entdeckt. Die Ausnahme bildet lediglich das sogenannte Higgs-Boson, das für die Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie und damit für die Generierung der “fundamentalen” Teilchenmassen verantwortlich ist. Ein anderer Mechanismus, die dynamische chirale Symmetriebrechung in der Quantenchromodynamik, bewirkt die Erzeugung des Hauptanteils der Masse gewöhnlicher (hadronischer) Materie. Die Higgs-Masse ist aber in weiten Grenzen ein freier Parameter der Theorie und kann in einem Bereich von etwa 100 GeV bis ca. 1 TeV liegen<sup>1</sup>. Die meisten Physiker erwarten also in den Experimenten der nächsten Generation (LHC, NLC), die diesen Parameterbereich vollständig abdecken können, das Higgs-Boson zu entdecken. Momentane Präzisionsmessungen elektroschwacher Observablen weisen auf ein eher leichtes Higgs-Boson hin. Einschränkend muss man allerdings anmerken, dass sich die erzielten Erfolge fast ausschließlich auf den perturbativen Bereich des Modells beschränken. Die Möglichkeiten nicht-perturbative Theorien zu beherrschen sind immer noch beschränkt. Der Niederenergiebereich der Quantenchromodynamik ist nach wie vor ein mit großen Unsicherheiten behaftetes Gebiet. Die Hoffnungen ruhen hier vor allem auf besseren Gitter-Simulationen mit der nächsten Generation von Super-Computern.

Die einzige Annahme des Standardmodells, die revidiert werden musste, ist, dass Neutrinos masselose Teilchen seien. Verschiedene Experimente, die das Verhalten sowohl der Sonnenneutrinos (Homestake, GALLEX (GNO), SAGE, Kamiokande, Super-Kamiokande) als auch der durch hochenergetische kosmische Strahlung in der Erdatmosphäre erzeugten Neutrinos (Kamiokande, Super-Kamiokande, MACRO) untersuchen, weisen auf das Phänomen der Neutrino-Oszillation hin, welches nur stattfinden kann, wenn Neutrinos massiv sind (die Ergebnisse des LSND Experiments, welches ebenfalls Neutrino-Oszillationen beobachtet, sind nach wie vor umstritten). Die Bestimmung der relevanten Parameter sowie die Natur dieser Massen (Dirac- oder Majorana-Massen) bilden den Kern intensiver Forschungen auf diesem Gebiet (siehe z.B. [1]).

Trotz dieses bemerkenswerten Erfolgs des Standardmodells ist das Unbehagen vieler Physiker

---

<sup>1</sup>Die Untergrenze ergibt sich aus der direkten Suche am LEP für ein Standardmodell-Higgs-Boson, die Obergrenze aus Unitaritätsargumenten, ohne weitere Einschränkungen durch elektroschwache Observable.

mit dieser Theorie nie ganz gewichen. Die Gründe dafür sind vielfältiger Natur. So hat schon alleine die Anzahl der freien Parameter des Modells stets irritiert. Daneben weist das Modell einige konzeptionelle Schwächen vor allem in dem bisher weitgehend unerforschten Higgs-Sektor auf, die unter dem Stichwort “Hierarchie-Problem” bekannt sind. Das hat erstaunlicherweise zu einer gewissen Erwartungshaltung geführt, endlich einen experimentellen Hinweis für Physik jenseits des Standardmodells zu finden (z.B. Supersymmetrie, LR-Symmetrie, Dynamische Symmetriebrechung).

Die Bemühungen der Forscher, über das Standardmodell hinaus die Physik tiefergehend und bei höheren Energieskalen zu verstehen, lassen momentan verschiedene Hauptrichtungen erkennen: Einen Ansatzpunkt bildet die Kritik, dass das Standardmodell bisher lediglich drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen beschreibt. Zwischen Gravitation und Quantenfeldtheorie (also der Physik der größten und der Physik der kleinsten Längenskalen) scheint eine fast unüberbrückbare Barriere zu liegen. Die Bemühungen eine vereinheitlichte Theorie für alle Wechselwirkungen zu finden haben bisher zu dem sehr formalen Ansatz der String-Theorie geführt. Diese Teilrichtung der Forschung wird heute oft als “Suche nach der Weltformel” bezeichnet.

Einen diesem formalen Ansatz ganz entgegengesetzten Weg stellt der phänomenologische Zugang dar. Falls die theoretischen Bedenken gegen das Standardmodell richtig sind und im Energiebereich von TeV tatsächlich eine Reihe neuer Phänomene stattfinden, entkoppeln diese offensichtlich weitgehend von der Niederenergiephysik. Trotzdem sollten sich diese Effekte bei noch präziserem Vergleich von experimentellen Daten und theoretischen Vorhersagen letztlich nachweisen lassen und damit Aufschlüsse über die Physik jenseits des Standardmodells liefern. Dazu sind einerseits bessere theoretische Vorhersagen notwendig (die teilweise an den mangelnden Möglichkeiten scheitern, den nicht-perturbativen Bereich der Quantenchromodynamik zu untersuchen) zum anderen genauere Experimente. Besonders attraktiv erscheint dafür der Bereich der CP-Verletzung in K- und B-Systemen sowie seltene Zerfälle, die im Standardmodell entweder gar nicht erlaubt oder stark unterdrückt sind (siehe z.B. [2]). Daneben wird natürlich auch der direkte Weg gegangen, durch Experimente bei höherer Energie die zusätzlichen Teilchen im TeV Bereich On-Shell zu erzeugen.

Als ein weiteres, zunehmend an Bedeutung gewinnendes Gebiet erweist sich die Astro-Teilchenphysik. Interessanterweise bietet die Kombination von Astrophysik und Elementarteilchenphysik (also die Kombination von Physik der größten und der kleinsten Längenskalen), die auf fundamentalen Niveau so große Schwierigkeiten bereitet, für phänomenologische Untersuchungen äußerst attraktive Möglichkeiten. So wurden auch die vorher erwähnten Neutrino-Oszillationen durch Experimente, die astrophysikalische Teilchenquellen benützen, nachgewiesen. Ein weiterer wichtiger Hinweis aus der Astrophysik ist das Rätsel der fehlenden Materie im Universum. Verschiedenste Beobachtungen auf unterschiedlichsten Längenskalen (Rotationskurven von Galaxien, Bewegung von Galaxien-Clustern, gravitatives Lensing von Quasaren, Big-Bang-Nukleosynthese usw.) zeigen, dass die für uns sichtbare Materie im Universum nur einen kleinen Anteil der Gesamtmaterie des Universums darstellt. Zusätzlich weisen Entfernungsmessungen von Supernovae vom Typ IA auf das Vorhandensein “dunkler Vakuumenergie” hin, einer kosmologischen Konstanten. Die Natur der “dunklen Materie” ist aber letztlich noch weitgehend ungeklärt. Die Kombination aller Messungen lässt langsam folgendes Bild erkennen: Nur ein geringer Teil der dunklen Materie ist baryonischer Natur und kann durch astrophysikalische Objek-

te (braune Zwerge, Neutronensterne usw.) erklärt werden. Der größte Anteil wird durch schwach wechselwirkende massive Elementarteilchen, sogenannte WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles), erklärt, die in einer Frühphase des Universums aus dem Gleichgewichtszustand "ausgefroren" sind, und nun das Universum ausfüllen. Möglicherweise wird ein Teil der dunklen Materie auch durch dunkle Vakuumenergie erzeugt. Eine intensive Suche nach den WIMPs mit sog. Cryogenic Detectors (DAMA, CRESST, CDMS) findet momentan in verschiedenen Experimenten statt, hat aber bisher noch keinen eindeutigen Nachweis ergeben [3–5].

Zuletzt wollen wir auf kosmologische Aspekte zu sprechen kommen. Seit der Erkenntnis, dass es in Quantenfeldtheorien mit spontaner Symmetriebrechung in der Hochtemperaturphase zu einer Restaurierung der Symmetrie kommen kann [6, 7], hat ein intensives Studium solcher Phasenübergänge begonnen. Das hat große Bedeutung, da das Universum in seiner Evolution seit dem Urknall eine Reihe solcher Phasenübergänge durchlaufen haben sollte. Die Evolution des Universums stellt sich nach diesem Bild folgendermaßen dar [8]<sup>2</sup>: Kurz nach dem Urknall war das Universum extrem heiß und dicht, durch die schnelle Expansion kühlte sich das Universum dann rasch ab, sodass es nach ca.  $10^{-38}$  sec. eine Temperatur von  $10^{16}$  GeV ( $10^{29}$  K; zum Vergleich: im Inneren der Sonne herrscht eine Temperatur von ca.  $10^7$  K) erreichte. Bei dieser Temperatur hat vermutlich ein GUT-Phasenübergang stattgefunden. Nach einer weiteren Abkühlung hat das Universum nach ca.  $10^{-10}$  sec. eine Temperatur von 100 GeV ( $10^{15}$  K) erreicht und ist damit in die gebrochene Phase der elektroschwachen Symmetrie übergegangen. Bei einer Temperatur von 100 MeV ( $10^{12}$  K) hat sich nach etwa  $10^{-3}$  sec. schließlich der chirale Phasenübergang der QCD angeschlossen. Erst nach dieser Zeitspanne lag die Materie in der Form vor, wie wir sie heute kennen: Leptonen und Hadronen. Während dieser Phasenübergänge können durch Abweichungen vom Gleichgewicht wichtige Grundstrukturen des heutigen Universums gelegt worden sein. Das können topologische Defekte wie Monopole oder kosmische Strings sein, oder auch die heute beobachtete Baryonenasymmetrie. Die Tatsache, dass das Standardmodell nicht in der Lage ist die Baryonenasymmetrie des Universums zu erklären (der Versuch, die Baryonenasymmetrie durch Abweichungen von Gleichgewicht während des elektroschwachen Phasenübergangs zu erklären, scheiterte), kann als ein experimenteller Beweis angesehen werden, dass Physik jenseits des Standardmodells notwendig ist [9–15].

Der chirale Phasenübergang der QCD ist der einzige mit momentanen Technologien experimentell erreichbare Phasenübergang aus der oben genannten Liste. Experimente dazu laufen bereits (CERN SPS) bzw. sind in Planung (RHIC, CERN LHC). Dazu werden hochenergetische Schwerionenstrahlen auf Fixed-Targets geschossen, z.B. Blei auf Blei. Erste Ergebnisse verschiedener Experimente am CERN können bereits so interpretiert werden, dass eine neue Phase der Materie, das sogenannte Quark-Gluon-Plasma, schon kurzzeitig erzeugt wurde. Eindeutige Hinweise wird man aber erst mit den Experimenten der nächsten Generation erhalten, die wesentlich höhere Energien zur Verfügung stellen.

Das zeigt deutlich, dass eine profunde Kenntnis thermaler Quantenfeldtheorie sowohl im Gleichgewicht als auch im Nichtgleichgewicht unabdingbar ist. Selbst die Gleichgewichts-Quantenfeldtheorie weist konzeptionelle Schwierigkeiten auf, während die Formulierung einer

---

<sup>2</sup>Experimentell ist die Physik ab ca.  $10^{-3}$  Sekunden nach dem Urknall zugänglich, die theoretische Beschreibung reicht sogar bis etwa  $10^{-10}$  sec. nach dem Urknall zurück; die Vorgänge vor dieser Zeit sind weitgehend Spekulation.

Nichtgleichgewichtstheorie noch weitgehend unklar ist. Die Schwierigkeiten resultieren vor allem aus der Tatsache, dass durch das Auftreten von Infrarot-Divergenzen an verschiedensten Stellen unser wichtigstes Hilfsmittel, nämlich die Störungstheorie, versagt. So konnte z.B. erst durch umfangreiche Gitter-Simulationen gezeigt werden, dass der elektroschwache Phasenübergang im Standardmodell die Baryonasymmetrie *nicht* erzeugen kann, da für den experimentell noch erlaubten Bereich der Higgs-Masse kein Phasenübergang erster Ordnung, sondern ein kontinuierlicher Crossover auftritt. Hingegen zeigt die Störungstheorie einen Phasenübergang erster Ordnung. Eine störungstheoretische Berechnung des Phasenübergangs von  $O(N)$ -symmetrischen skalaren Theorien zeigt allgemein einen Phasenübergang erster Ordnung an, wohingegen andere (zuverlässigere) Methoden einen Phasenübergang zweiter Ordnung belegen. Diese falschen Ergebnisse der Störungstheorie haben das Auftreten langreichweitiger Korrelationen am Phasenübergang zum Grund. Durch den Zusammenbruch der Störungstheorie am Phasenübergang lässt sich damit auch die sogenannte Plasmon-Dämpfungsrate nicht korrekt berechnen. Diese beschreibt den Zerfall von kleinen Abweichungen vom Gleichgewichtszustand und ist damit ein wichtiger Parameter für die Defektbildung bei einem Phasenübergang. Im Gegensatz zu dem älteren Kibble-Mechanismus der Defektbildung [16], der eine Gleichgewichtsbeschreibung zu Grunde legt, geht der Zurek-Mechanismus [17] davon aus, dass ein Phasenübergang zweiter Ordnung immer ein Nichtgleichgewichts-Phänomen darstellt. Bei einem “realen” Phasenübergang wird das System mit einer bestimmten Temperaturänderungsrate durch den Phasenübergang gekühlt. Da man erwartet, dass die Dämpfungsrate sogenanntes “Critical Slowing Down” zeigt, also am Phasenübergang gegen Null geht, wird deshalb das System bei einer bestimmten Temperatur den Gleichgewichtszustand verlassen und bis zum Phasenübergang nicht wieder erreichen. Das wird der Fall sein, wenn die Lebensdauer der Fluktuation größer als die Zeitdauer bis zum Erreichen des Phasenübergangs ist. Die typische Längenskala für topologische Defekte wird dann durch die Korrelationslänge bei dieser Temperatur festgelegt. Die Längenskala für Defekte wird also durch die Dämpfungsrate als Funktion der Temperatur und die Kühlungsrate bestimmt. Essenziell für diesen Mechanismus ist folglich das Critical Slowing Down der Dämpfungsrate. Diese ist verknüpft mit dem Imaginärteil der Selbstenergiefunktion und taucht in Störungstheorie auf Zwei-Loop-Niveau auf. Allerdings zeigt die störungstheoretisch (in einer Hochtemperaturentwicklung) berechnete Dämpfungsrate kein Critical Slowing Down, sondern vielmehr ein Critical Speeding Up [18, 19]. Dieses Ergebnis sollte aber wiederum nicht ernst genommen werden, es hat seinen Ursprung vielmehr im Zusammenbruch der Störungstheorie am Phasenübergang.

Ein weiteres schwerwiegendes Problem liegt in der Abwesenheit einer magnetischen Eichboson-Masse in nicht-abelschen Eichtheorien. Somit gibt es keine Abschirmung statischer Magnetfelder. Störungstheorie ist nicht in der Lage diese magnetische Masse zu beschreiben, die Berechnung von sogenannten Ringdiagrammen führt dann nach Power-Counting Argumenten jenseits von Drei-Loop zum kompletten Zusammenbruch der Störungstheorie. Die Interpretation dieses Problems ist weitgehend unverstanden [20].

Das belegt deutlich, dass wir zuverlässige nicht-perturbative Methoden zur Beschreibung thermaler Quantenfeldtheorie benötigen. Grundsätzlich existieren im Wesentlichen zwei Formulierungen der thermalen Quantenfeldtheorie, die Matsubara- und die Realzeit-Formulierung. Eine spezielle Realzeit-Formulierung wird auch “Closed-Time-Path”- bzw. Schwinger-Keldysh-

Formulierung genannt. Die Matsubara-Formulierung arbeitet in euklidischer Raumzeit und ist damit zunächst nur zur Bestimmung rein statischer Größen geeignet, während die Realzeit-Formulierung in Minkowski-Raumzeit arbeitet und damit die adäquate Basis für eine Nichtgleichgewichtsbeschreibung darstellt. Trotzdem können durch analytische Fortsetzung der euklidischen Raumzeit auch im Matsubara-Formalismus Aussagen über nicht-statische Größen im Sinne einer Linear-Response-Theorie gemacht werden. Der Matsubara-Formalismus lässt sich leicht in Gitter-Simulationen implementieren, die immer in euklidischer Raumzeit durchgeführt werden. Damit steht man aber vor dem Problem (das jede numerische Methode hat), dass eine analytische Fortsetzung und damit die Beschreibung nicht-statischer Größen unmöglich wird. Es erscheint also unumgänglich nicht-perturbative Methoden in Minkowski-Raumzeit zu formulieren, um nicht-statische Größen im Sinne einer Linear-Response-Theorie berechnen zu können. Ein Einsatz von numerischen Methoden ist dann unproblematisch, da keine analytische Fortsetzung mehr notwendig ist.

Eine nicht-perturbative Methode, die speziell für Phasenübergänge zweiter Ordnung und für divergente Korrelationslängen in der Festkörperphysik entwickelt wurde, ist die sogenannte wilsonsche Renormierungsgruppe. Die Theorie wird durch einen effektiven Infrarot-Cut-off regularisiert und damit von den Infrarot-Divergenzen befreit. Eine Formulierung der wilsonischen Renormierungsgruppe in thermaler Quantenfeldtheorie existiert bereits im Matsubara-Formalismus und wird allgemein als exakte Renormierungsgruppe bezeichnet. Diese wurde bereits erfolgreich u.a. auch auf das skalare  $O(N)$ -Modell angewendet. Allerdings erfordern Renormierungsgruppen-Techniken im Allgemeinen den intensiven Einsatz numerischer Methoden, die oben genannten Probleme ergeben sich damit auch für diesen Ansatz. Eine Formulierung im Realzeit-Formalismus wurde bisher nur für skalare Theorien gegeben und dann auf Eichtheorien erweitert. Diese Methode hat sich mittlerweile unter dem Namen thermale Renormierungsgruppe etabliert. Die Zuverlässigkeit der Methode, das kritische Verhalten von skalaren  $O(N)$ -Modellen korrekt wiederzugeben, konnte bereits erfolgreich demonstriert werden. Eine Formulierung für fermionische Systeme fehlte bislang.

Damit kommen wir zur konkreten Zielsetzung dieser Arbeit: Es sollte die thermale Renormierungsgruppe für fermionische Systeme formuliert werden und ein geeignetes Näherungsschema etabliert werden, das es erlaubt, das kritische Verhalten von Systemen mit Skalaren und Fermionen korrekt wiederzugeben. Damit bildet diese Arbeit den Ausgangspunkt für nicht-perturbative Berechnungen thermischer Eigenschaften gemischter Systeme, sowohl in Bezug auf statische, als auch auf nicht-statische Größen.

Die Arbeit gliedert sich im Einzelnen wie folgt:

In Kapitel 2 geben wir eine kurze Einführung in die Realzeit-Formulierung der thermalen Quantenfeldtheorie. Diese ist weit weniger populär als der Matsubara-Formalismus, da sich gegenüber diesem einige Komplikationen, wie die Notwendigkeit der Einführung sogenannter thermischer Geistfelder, ergeben. Wir beschränken uns dabei auf eine Diskussion der für uns relevanten Aspekte des Formalismus. Eine Diskussion der Grundeigenschaften des kritischen Verhaltens und universeller Aspekte an Phasenübergängen zweiter Ordnung geben wir im Zusammenhang mit der wilsonischen Renormierungsgruppe in der Festkörperphysik. Diese Diskussion bildet die Grundbasis für das weitere Vorgehen.

In Kapitel 3 übertragen wir die Idee der wilsonischen Renormierungsgruppe auf die Quanten-

feldtheorie. Zuerst stellen wir die exakte Renormierungsgruppe vor, da starke Parallelen zur thermalen Renormierungsgruppe bestehen, mit denen wir den Leser vertraut machen wollen. Die Vorstellung der thermalen Renormierungsgruppe sowie die neue Formulierung für fermionische Systeme nehmen wir dann gemeinsam im zweiten Teil dieses Kapitels vor. Die Ableitung der exakten Renormierungsgruppen-Gleichung für ein System aus Fermionen und Skalaren wird gegeben. Im letzten Teil dieses Kapitels leiten wir modellunabhängig die wichtigsten Evolutionsgleichungen für greensche Funktionen ab.

Damit kommen wir in Kapitel 4 zur Beschreibung des Modells, auf das wir das erarbeitete Verfahren anwenden werden. Dies ist das sogenannte chirale Quark-Meson-Modell. Dieses Modell geht auf ein lineares  $O(4)$ -Modell zurück, aber mit der Kopplung eines Fermion-Dubletts an das Mesonfeld (wir betrachten ein Zwei-Flavour-Modell). Anhand dieses Modells entwickeln wir ein geeignetes Näherungsschema, welches eine korrekte Beschreibung sowohl universeller als auch nicht-universeller Größen erlaubt. Wir werden uns zunächst auf den Bereich kleiner Kopplungen beschränken um dem Problem eines nicht-perturbativen Start-Potenzials aus dem Weg zu gehen. (Das soll nicht bedeuten, dass wir nun doch eine perturbative Rechnung durchführen. Was es mit dem Start-Potenzial auf sich hat, können wir aber erst im Laufe der Arbeit genauer erläutern.) Wir werden dann die universellen Eigenschaften des Modells, welches in der Universalitätsklasse des  $O(4)$ -Modells liegt, diskutieren und mit den Resultaten anderer Berechnungen vergleichen. Die kritische Temperatur als nicht-universelle Größe werden wir in Abhängigkeit der Kopplungen diskutieren. Das gemachte Näherungsschema enthält über die sogenannte Ableitungsentwicklung hinaus eine effektive thermale Fermion-Masse, die chiral invariant ist. Wir werden die Notwendigkeit dieses zusätzlichen Massenterms zur Entkopplung der fermionischen Freiheitsgrade im dreidimensionalen Limes der Theorie ausführlich darlegen. Dieser Massenterm wurde erstmals in einer Renormierungsgruppen-Beschreibung des Modells berücksichtigt. Anders als in der exakten Renormierungsgruppe, wo er nur zu quantitativen Änderungen in nicht-universellen Größen führt, ist der Term in der thermalen Renormierungsgruppe unverzichtbar um die kritische Physik korrekt beschreiben zu können. Er ergibt sich aus einer Entwicklung des sogenannten "Hard Thermal Loop"-Propagators. Der Gültigkeitsbereich dieser Entwicklung wird anschließend diskutiert.

Das chirale Quark-Meson-Modell haben wir gewählt, da es erstens das ideale Testfeld für die Etablierung der Methode darstellt, und zweitens, da es auch physikalisch von großem Interesse ist: Das chirale Quark-Meson-Modell kann als eine effektive Beschreibung des chiralen Phasenübergangs der Quantenchromodynamik im Zwei-Flavour-Fall und im chiralen Limes mit vollständig gebrochener axialer  $U(1)_A$ -Symmetrie angesehen werden. Wir werden deshalb im letzten Abschnitt den Versuch unternehmen die Verbindung zum chiralen Phasenübergang der QCD herzustellen. Wir berechnen dazu die Temperaturabhängigkeit des chiralen Kondensats und stellen das Ergebnis mit anderen Resultaten in Beziehung. Ein kurzer Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten schließt die Diskussion ab.

In Kapitel 5 wird eine Zusammenfassung der Ergebnisse gegeben.

Die Anhänge A und B sind technischer Natur. In Anhang A werden alle berechneten Flussgleichungen nochmals übersichtlich zusammengestellt. Der Superspur-Formalismus, der in dieser Arbeit Anwendung fand, wird in Anhang B vorgestellt. Hier werden auch die technischen Details zur Herleitung der exakten Renormierungsgruppen-Gleichung im Superspur-Formalismus

gegeben.

In Anhang C schließlich erläutern wir, wie eine konsequente Ausnützung von Renormierungsgruppen-Argumenten auch in einem Modell der dynamischen elektroschwachen Symmetriebrechung, dem sogenannten Top-Quark-Kondensations-Modell, einige interessante Fragen beantworten kann. Wir gehen ausführlich auf die Bedeutung des quadratischen Massenparameters in der Renormierungsgruppen-Formulierung dieses Modells ein und erläutern, wie dieses Laufen im Zusammenhang zur exakten Renormierungsgruppe gesehen werden kann. Anschließend diskutieren wir die Frage der höherdimensionalen Operatoren in dieser Formulierung. Es wurde in der Literatur die Befürchtung geäußert, dass das Auftreten höherdimensionaler Operatoren die Vorhersagekraft des Top-Kondensations-Modells komplett zerstören würde und das Modell in Wirklichkeit nichts anderes ist als eine reine Reparametrisierung des Standardmodells. Wir werden diese Frage im Renormierungsgruppen-Formalismus untersuchen und die vorgeschlagenen Operatoren tatsächlich reproduzieren können. Allerdings stimmen wir mit der Interpretation, dass deshalb Top-Kondensations-Modelle reine Reparametrisierungen des Standardmodells seien, nicht überein. Wir werden im Rahmen unserer Formulierung ein Kriterium angeben, wann dies der Fall ist. Anschließend werden wir für beide Fälle ein Beispiel erläutern. Das wird einerseits Top-Kondensation durch einen Austausch eines skalaren Teilchens sein. Wir werden zeigen, warum wir dieses Modell für eine reine Reparametrisierung des Standardmodells halten. Andererseits werden wir Top-Kondensation durch den Austausch eines massiven Eichbosons erläutern. Hier liegt unserer Ansicht nach keine Reparametrisierung des Standardmodells vor. Zuletzt werden wir die Frage nach dem Auftauchen von vektoriellen Bindungszuständen im Niederenergiespektrum diskutieren, welche mit den Renormierungsgruppen-Argumenten ebenfalls beantwortet werden kann. Diese können nicht, wie das skalare Higgs-Boson, gegenüber der Top-Kondensations-Skala abgesenkt sein und damit im Niederenergiespektrum vorhanden sein.



## 2. THERMALE QUANTENFELDTHEORIE UND KRITISCHE PHÄNOMENE

In diesem und dem nächsten Kapitel werden wir die technischen Grundlagen für diesen Teil der Arbeit vorstellen. Wir werden uns dabei auf die für uns relevanten Aspekte beschränken. Da es sich dabei um bekannte Methoden handelt, findet sich eine Vielzahl von Veröffentlichungen, die die hier angesprochenen Techniken in einem allgemeineren Zusammenhang diskutieren. Der interessierte Leser, der sich in die eine oder andere Frage vertiefen möchte, findet an den entsprechenden Stellen die wichtigsten Referenzen. Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in die thermale Quantenfeldtheorie, wobei wir uns fast ausschließlich auf die Realzeit-Formulierung beschränken werden. Zudem werden wir lediglich die Gleichgewichts-Theorie formulieren, da wir aber im Realzeit-Formalismus arbeiten, ist es uns trotzdem möglich, Aussagen über geringe Abweichungen vom Gleichgewichtszustand im Sinne einer Linear-Response-Theorie zu machen. Eine Beschreibung von Nichtgleichgewichtsdynamik im Rahmen einer Linear-Response-Theorie ist im Matsubara-Formalismus zwar prinzipiell durch analytische Fortsetzung ebenfalls möglich, da wir hier aber numerische Methoden anwenden werden müssen, bliebe dieser Weg verwehrt. Anschließend werden wir an einem Beispiel aus der statistischen Physik die wilsonische Renormierungsgruppe erörtern, da sie für diese Arbeit das Rückgrat zur Untersuchung kritischer Phänomene bildet. In Bezug auf kritische Phänomene werden wir den Leser nur an einige Grundtatsachen erinnern. Zuletzt stellen wir die Formulierung der wilsonischen Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie vor. Wir werden kurz den Ansatz der sog. exakten Renormierungsgruppe erläutern und dann ausführlich die thermale Renormierungsgruppe einführen, da die Berechnung des chiralen Phasenübergangs in dieser Arbeit ausschließlich im Rahmen dieser Formulierung durchgeführt wurde. Mit der Ableitung der grundlegenden Flussgleichungen werden wir diesen Abschnitt abschließen. Wir werden in dieser Arbeit, wie in theoretischen Arbeiten üblich, immer Einheiten mit  $\hbar = c = k_B = 1$  benutzen.

### 2.1. Thermale Feldtheorie in der Realzeit-Formulierung

Thermale Quantenfeldtheorie stellt eine Kombination zwischen statistischer Physik und Quantenfeldtheorie dar. Obwohl Quantenfeldtheorie auch ohne thermale Effekte immer eine Vielteilchentheorie ist, sind die Quantenfluktuationen rein virtuell, wohingegen der thermale Hintergrund reell – also auf der Massenschale – ist und im Gleichgewichtsfall nach der entsprechenden statistischen Verteilung den Phasenraum ausfüllt. Da thermale Fluktuationen somit immer multipliziert mit einer Verteilungsfunktion auftreten, entstehen keine zusätzlichen UV-Divergenzen in der Theorie. Die Verteilungsfunktionen liefern für UV-Moden einen Boltzmann-Faktor, der so

stark unterdrückend wirkt, dass die Integrale endlich bleiben. Die UV-Regularisierung einer thermalen Quantenfeldtheorie ist also mit der Regularisierung der entsprechenden ( $T = 0$ )-Theorie vollständig abgeschlossen. Problematisch hingegen ist das IR-Verhalten der thermalen Fluktuationen, wie wir noch deutlich sehen werden.

Ausgangspunkt für eine statistische Beschreibung ist üblicherweise die großkanonische Zustandssumme

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr} \exp \left[ -\beta (\hat{H} - \mu N) \right], \quad (2.1)$$

wobei  $\hat{H}$  der Hamilton-Operator,  $\beta = 1/T$  die inverse Temperatur und  $\mu$  das chemische Potenzial zu einer erhaltenen Teilchenzahl  $N$  ist. Im Falle mehrerer erhaltener Teilchenzahlen ist der Term als Summe  $\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} N_{\alpha}$  über diese aufzufassen. Im Falle eines ungeladenen Skalarfeldes ist die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße, weshalb dann das chemische Potenzial verschwindet. Wir wollen darüber hinaus in dieser Arbeit generell nur Systeme ohne chemisches Potenzial betrachten, was dem Limes geringer Teilchendichten entspricht. Die Lagrange-Dichte für ein System von Skalarfeldern und Fermionen lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m_{\varphi}^2 \varphi^2 + \bar{\psi} (\not{\partial} - m_{\psi}) \psi + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, \psi, \bar{\psi}). \quad (2.2)$$

Der Wechselwirkungsanteil  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, \psi, \bar{\psi})$  enthält das skalare Potenzial  $V(\varphi)$  und mögliche Yukawa-Kopplungen. Wir wollen die Anzahl der Felder bei dieser Diskussion offen lassen, schreiben deshalb die Summationen über die Felder und mögliche Indexstrukturen in den Wechselwirkungstermen nicht aus. Die Zustandssumme (2.1) kann als Pfadintegral umformuliert werden (siehe z.B. [28, 29])

$$Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ i \int_C d^4x (\mathcal{L} + j\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right]. \quad (2.3)$$

Die Kontur  $C$  des Volumenintegrals hat als Randwerte  $t_i = t_0$  und  $t_f = t_0 - i\beta$ . Die Felder müssen dabei die periodischen bzw. antiperiodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi(t_0, \vec{x}) &= \varphi(t_0 - i\beta; \vec{x}) \\ \psi(t_0, \vec{x}) &= -\psi(t_0 - i\beta, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

erfüllen. Zusätzlich haben wir Quellterme hinzugefügt, auf die wir gleich noch eingehen werden. Im Limes  $j, \eta, \bar{\eta} \rightarrow 0$  erhalten wir die Pfadintegraldarstellung für die Zustandssumme zurück. Der genaue Verlauf der Kontur ist zunächst nicht festgelegt. Betrachtet man Gl. 2.3 genauer, so wird die Analogie zum üblichen euklidischen Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie bei verschwindender Temperatur deutlich. Dort läuft das Volumenintegral aber über das Intervall  $t = -i\infty \cdots i\infty$ . Die thermale Physik liegt also im Wesentlichen in den Randbedingungen des Integrals! Kommen wir nun zu den zusätzlichen Quelltermen, die wir addiert haben. Wir können nun nämlich thermale greensche Funktionen, die als konturzeitgeordnete Feldoperator-Produkte definiert sind, auch durch Funktional-Differenziation in der üblichen Weise berechnen:

$$\begin{aligned}
iD_C(x_1, \dots, x_n) &= \langle T_C(\hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n)) \rangle_\beta \\
&= \frac{1}{Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta})} \frac{\delta^n Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta})}{i\delta j(x_1) \cdots i\delta j(x_n)} \Big|_{j=\eta=\bar{\eta}=0} \\
iS_C(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= \left\langle T_C(\hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) \hat{\psi}(y_1) \cdots \hat{\psi}(y_n)) \right\rangle_\beta \\
&= \frac{1}{Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta})} \frac{\delta^{2n} Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta})}{i\delta \bar{\eta}(x_1) \cdots i\delta \bar{\eta}(x_n) i\delta \eta(y_1) \cdots i\delta \eta(y_n)} \Big|_{j=\eta=\bar{\eta}=0}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Feldoperatoren werden dabei im Heisenbergbild betrachtet. Die zusätzliche Zeitordnung entlang der Kontur  $T_C$  kann wie folgt definiert werden. Wir führen eine nicht-singuläre Parametrisierung  $t = z(v)$  der Kontur mit  $z(0) = 0$  und  $z(1) = -i\beta$  ein. Der komplexwertige Zeitpunkt  $t_2$  liegt dann ‘‘nach’’  $t_1$ , wenn  $v_2 > v_1$  ist. Die Kontur-Dirac- und Heaviside-Funktionen sind dann definiert als

$$\theta_C(t - t') = \theta(v - v') , \quad \delta_C(t - t') = (z'(v))^{-1} \delta(v - v') , \tag{2.6}$$

und die Funktional-Ableitung entlang der Kontur als

$$\frac{\delta j(x)}{\delta j(x')} = \frac{\delta \eta(x)}{\delta \eta(x')} = \frac{\delta \bar{\eta}(x)}{\delta \bar{\eta}(x')} = \delta_C(t - t') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') . \tag{2.7}$$

Wir nehmen an, dass im Wechselwirkungsanteil der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, \psi, \bar{\psi})$  keine Ableitungskopplungen enthalten sind. Dann lässt sich die Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme in ihre Störungsentwicklung

$$Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) = \exp \left[ i \int_C d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left( \frac{\delta}{i\delta j(x)}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i\delta \eta} \right) \right] Z_C^f(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) \tag{2.8}$$

umschreiben und die freie Zustandssumme durch ein gaußsches Integral angeben

$$Z_C^f(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) = N \exp \left[ -i \int_C d^4x \int_C d^4x' \left( \frac{1}{2} j(x) D_C^f(x - x') j(x') + \bar{\eta}(x) S_C^f(x - x') \eta(x') \right) \right] . \tag{2.9}$$

Es zeigt sich nun, dass auf Tree-Niveau lediglich die Zwei-Punkt-Funktionen, also die Propagatoren, durch thermische Effekte modifiziert werden. Alle ( $n > 2$ )-Punkt-Funktionen erhalten erst durch Loop-Effekte Korrekturen [23]. Betrachten wir deshalb speziell die Zwei-Punkt-Funktionen, also die Kontur-Propagatoren. Die Auflösung der Zeitordnung liefert eine Zerlegung in die retardierten und avancierten Propagatoren

$$D_C(x, x') = \theta_C(t - t') D_C^>(x, x') + \theta_C(t' - t) D_C^<(x, x') \tag{2.10}$$

mit

$$D_C^>(x, x') = \langle \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \rangle_\beta \quad \text{und} \quad D_C^<(x, x') = \langle \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) \rangle_\beta = D_C^>(x', x) \tag{2.11}$$

und

$$S_C(x, x') = \theta_C(t - t') S_C^>(x, x')_{\alpha\beta} + \theta_C(t' - t) S_C^<(x, x')_{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

mit

$$S_C^>(x, x')_{\alpha\beta} = \left\langle \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x') \right\rangle_\beta \quad \text{und} \quad S_C^<(x, x')_{\alpha\beta} = - \left\langle \hat{\psi}_\beta(x') \hat{\psi}_\alpha(x) \right\rangle_\beta . \quad (2.13)$$

Benützt man die periodischen bzw. antiperiodischen Randbedingungen für die Propagatoren, die sog. Kubo-Martin-Schwinger-Relationen [26,27], die aus der zyklischen Eigenschaft der Spur in Gl. 2.1 folgen, und beachtet zusätzlich, dass Translations-Invarianz gilt, erhält man die Fourier-Darstellung der Propagatoren:

$$\begin{aligned} D_C(x - x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} [\theta_C(t - t') + f(k_0)] \rho(k) \\ S_C(x - x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} [\theta_C(t - t') - \tilde{f}(k_0)] \tilde{\rho}(k)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit den Definitionen

$$f(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} ; \quad \tilde{f}(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} + 1} \quad (2.15)$$

und den Spektraldichten  $\rho(k)$  und  $\tilde{\rho}(k)_{\alpha\beta}$ . Die Spektraldichten für eine wechselwirkungsfreie Theorie sind gegeben als

$$\begin{aligned} \rho^0(k) &= 2\pi \delta(k^2 - m_\varphi^2) (\theta(k_0) - \theta(-k_0)) \\ \tilde{\rho}^0(k) &= 2\pi \delta(k^2 - m_\psi^2) (\theta(k_0) - \theta(-k_0)) (\not{k} + m_\psi)_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Das gleiche Ergebnis lässt sich auch direkt im Operator-Formalismus erhalten. Hier geht man von der üblichen Fourier-Zerlegung des freien Feldoperators aus. Diese lautet für ein Skalarfeld

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [e^{-ikx} \mathbf{a}(k) + e^{ikx} \mathbf{a}^\dagger(k)] \quad (2.17)$$

bzw. für ein Fermion-Feld

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \sum_{\pm s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [e^{-ikx} \mathbf{b}(k, s) u(k, s) + e^{ikx} \mathbf{d}^\dagger(k, s) v(k, s)] \\ \hat{\psi}^\dagger(x) &= \sum_{\pm s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [e^{ikx} \mathbf{b}^\dagger(k, s) u^\dagger(k, s) + e^{-ikx} \mathbf{d}(k, s) v^\dagger(k, s)] , \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\mathbf{a}(k)$ ,  $\mathbf{a}^\dagger(k)$ ,  $\mathbf{b}(k, s)$ ,  $\mathbf{b}^\dagger(k, s)$  und  $\mathbf{d}(k, s)$ ,  $\mathbf{d}^\dagger(k, s)$  sowie den Spinoren  $u(k, s)$  und  $v(k, s)$ . Betrachten wir nun die thermischen Erwartungswerte für die Teilchenzahl-Operatoren  $\mathcal{N} = \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k)$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}^+ = \mathbf{b}^\dagger(k, s) \mathbf{b}(k, s)$  und  $\tilde{\mathcal{N}}^- = \mathbf{d}^\dagger(k, s) \mathbf{d}(k, s)$ . Thermische Mittelwerte werden wie üblich berechnet

$$\left\langle \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k') \right\rangle_\beta = \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k')] , \quad (2.19)$$

man erhält als Ergebnis für die skalaren Operatoren [24]

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}^\dagger(k)\mathbf{a}(k') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{BE}}(\omega_k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{a}(k)\mathbf{a}^\dagger(k') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k (1 + N_{\text{BE}}(\omega_k)) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')\end{aligned}\quad (2.20)$$

und für die fermionischen Operatoren

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{b}^\dagger(k, s)\mathbf{b}(k', s') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{FD}}(\omega_k) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{d}^\dagger(k, s)\mathbf{d}(k', s') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{FD}}(\omega_k) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{b}(k, s)\mathbf{b}^\dagger(k', s') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k (1 - N_{\text{FD}}(\omega_k)) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{d}(k, s)\mathbf{d}^\dagger(k', s') \rangle_\beta &= (2\pi)^3 2\omega_k (1 - N_{\text{FD}}(\omega_k)) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') .\end{aligned}\quad (2.21)$$

Dieses Ergebnis ist intuitiv sofort klar. Der thermische Erwartungswert der Teilchenzahl-Operatoren  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}^+$  und  $\tilde{\mathcal{N}}^-$  ist durch die Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Statistik

$$N_{\text{BE}}(\omega_k) = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}, \quad N_{\text{FD}}(\omega_k) = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} + 1}\quad (2.22)$$

gegeben. Die zweite Relation in Gl. 2.20 bzw. die Relationen drei und vier in Gl. 2.21 ergeben sich aus der Forderung, dass die Vertauschungs- bzw. Antivertauschungs-Relationen der ( $T=0$ )-Theorie erhalten bleiben.

Mit diesen Erwartungswerten können nun leicht die Kontur-Propagatoren aus Gl. 2.10, 2.11 und 2.12, 2.13 berechnet werden,

$$\begin{aligned}iD_C(x - x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m_\phi^2) e^{-ik(x-x')} \\ &\quad \left[ \theta_C(t - t') \theta(k_0) + \theta_C(t' - t) \theta(-k_0) + N_{\text{BE}}(|k_0|) \right], \\ iS_C(x - x')_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m_\psi^2) (\not{k} + m_\psi)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-x')} \\ &\quad \left[ \theta_C(t - t') \theta(k_0) + \theta_C(t' - t) \theta(-k_0) - N_{\text{FD}}(|k_0|) \right],\end{aligned}\quad (2.23)$$

was mit Gl. 2.14 übereinstimmt. Das zeigen einfache Umformungen.

Bisher wurde die Kontur noch nicht genauer spezifiziert. Die Freiheit der Kontur-Wahl wird durch einige grundlegende Eigenschaften eingeschränkt. Es zeigt sich, dass die Propagatoren  $D_C^>(x, x')$  und  $S_C^>(x, x')$  analytisch in dem Streifen  $-\beta < \Im(t - t') < 0$  sind. Auf den Rändern sind die Propagatoren dann Distributionen. Deshalb muss die Kontur in diesem Streifen liegen. Außerdem muss der Imaginärteil von  $t$  entlang der Kontur monoton fallend sein. Es muss zudem beachtet werden, dass die Funktional-Ableitung nur nach Quellen an Raumzeitpunkten durchgeführt werden kann, die auch auf der Kontur liegen. Ansonsten kann die Kontur aber frei gewählt werden. Eine günstige Wahl der Kontur kann den Rechenaufwand bzw. die Praktikabilität der Rechnung jedoch stark beeinflussen. Letztlich *müssen* aber alle physikalischen Resultate

unabhängig von der Wahl der Kontur sein! Wir wollen kurz die beiden gebräuchlichsten Konturen vorstellen.

### Die Matsubara-Kontur:

Die Matsubara-Kontur verbindet Anfangs- und Endpunkt der Kontur durch eine Gerade (siehe Abb. 2.1). Die Propagatoren müssen dann die partiellen Differenzialgleichungen ( $\tau = -it$ )

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m_\varphi^2 \right) D_F(x - x') &= \delta(\tau_x - \tau_{x'}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \\ \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} - i\vec{\gamma} \vec{\nabla} + m_\psi \right) S_F(x - x') &= \delta(\tau_x - \tau_{x'}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit periodischen bzw. antiperiodischen Randbedingungen in  $\tau$  mit der Periode  $\beta$  erfüllen. Als Lösung erhält man im Impulsraum

$$\begin{aligned} D_F(k) &= \frac{1}{\omega_n^{b2} + \omega_k^{b2}} ; \quad \omega_n^b = \frac{2\pi n}{\beta} \\ S_F(k) &= \frac{\omega_n^f \gamma^0 - \vec{k} \vec{\gamma} + m_\psi}{\omega_n^{f2} + \omega_b^{f2}} ; \quad \omega_n^f = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit den diskreten Matsubara-Frequenzen  $\omega_n^b$  bzw.  $\omega_n^f$ . In den Feynman-Regeln muss die 4-dimensionale Integration ersetzt werden durch

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} . \quad (2.26)$$

Die Zeitabhängigkeit ist hier nun völlig verschwunden, was nicht weiter verwundern sollte. Wir haben uns auf die Beschreibung von Gleichgewichtsphänomenen beschränkt. Diese hängen aber

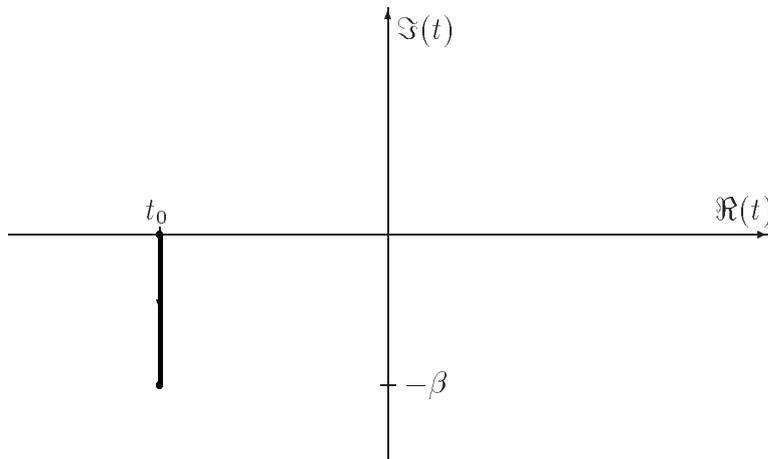


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung der Matsubara-Kontur.

nicht von der Zeit ab, damit ist man zunächst auf die Berechnung rein statischer Größen beschränkt. Das zeigt sich auch daran, dass hier nur greensche Funktionen bei imaginären Zeitargumenten berechnet werden können. Um kleine Abweichungen vom Gleichgewicht im Sinne einer Linear-Response-Theorie beschreiben zu können benötigt man aber greensche Funktionen bei reellen Zeitargumenten. Diese greenschen Funktionen müssen im Matsubara-Formalismus nun durch analytische Fortsetzung gewonnen werden. Bei numerischen Berechnungen verbietet sich dieser Weg leider. Zur Berechnung rein statischer Gleichgewichtsgrößen ist der Matsubara-Formalismus aber dem Realzeit-Formalismus überlegen, wie wir noch sehen werden.

### Die Realzeit Kontur:

Um greensche Funktionen bei reellen Zeitargumenten direkt berechnen zu können wurde die Realzeitkontur eingeführt [21, 22]. Die Kontur verläuft über die vier Teilstücke (siehe Abb. 2.2):

- Entlang der Realteil-Achse von  $-t_1$  bis  $t_1$  ( $t_1$  beliebig):  $C_1$ .
- Parallel zur Imaginärteil-Achse von  $t_1$  bis  $t_1 - i\sigma$  ( $0 < \sigma < \beta$  beliebig):  $C_3$ .
- Parallel zur Realteil-Achse von  $t_1 - i\sigma$  bis  $-t_1 - i\sigma$ :  $C_2$ .
- Parallel zur Imaginärteil-Achse von  $-t_1 - i\sigma$  bis  $-t_1 - i\beta$ :  $C_4$ .

Wir wollen auch hier die immer noch vorhandene Konturintegration eliminieren. Dazu geht man zunächst zum Limes  $t_1 \rightarrow \infty$ , die Zustandssumme der Theorie faktorisiert in diesem Limes

$$Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) = N_1 Z_{C_{12}}(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) Z_{C_{34}}(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) . \quad (2.27)$$

Dabei umfasst  $C_{12}$  die Pfadabschnitte  $C_1$  und  $C_2$  –  $C_{34}$  die Abschnitte  $C_3$  und  $C_4$  (siehe Abb. 2.2). Der Anteil der Pfadabschnitte in  $C_{34}$  liefert lediglich eine multiplikative Konstante, kann also in die Normierung absorbiert werden. Wichtig ist, dass diese Faktorisierung nur dann zulässig ist, wenn man greensche Funktionen mit mindestens einem äußeren Feld berechnet. Andernfalls kann der vertikale Anteil des Pfades nicht einfach als Konstante betrachtet werden. Das gilt

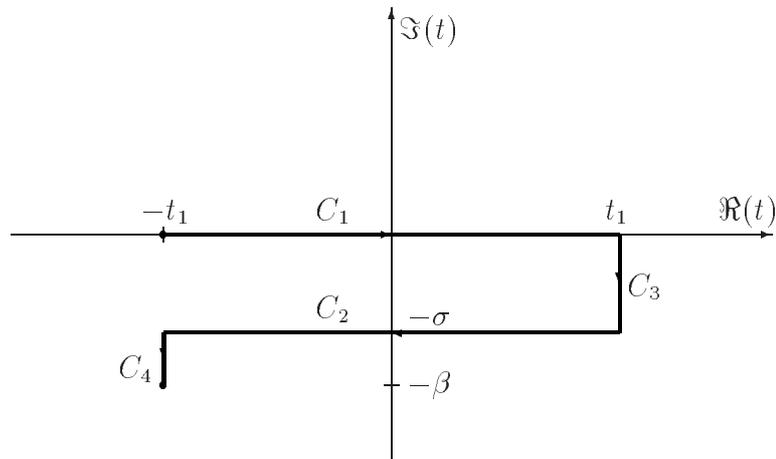


Abbildung 2.2: Grafische Darstellung der Realzeit-Kontur.

in erster Linie für die freie Energie und z.B. damit auch für den Druck, der ja durch partielle Ableitung der freien Energie berechnet werden kann. Hierfür eignet sich dann entsprechend der Matsubara-Formalismus besser, der ja gerade nur diesen vertikalen Anteil beinhaltet. Macht man diese Faktorisierung, ist es nützlich neue Quellfunktionen auf den entsprechenden Pfadabschnitten zu definieren. Wir berücksichtigen dabei gleich noch den konstanten Imaginärteil des Zeitarguments, sodass die neuen Quellfunktionen rein reelle Argumente haben:

$$\begin{aligned} j_1(x) &= j(t, \vec{x}) ; & j_2(x) &= j(t - i\sigma, \vec{x}) \\ \eta_1(x) &= \eta(t, \vec{x}) ; & \eta_2(x) &= \eta(t - i\sigma, \vec{x}) \\ \bar{\eta}_1(x) &= \bar{\eta}(t, \vec{x}) ; & \bar{\eta}_2(x) &= \bar{\eta}(t - i\sigma, \vec{x}) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

In der Zustandssumme erhält man dann eine Summe von Termen, die den verschiedenen Möglichkeiten entsprechen die Quellen auf  $C_1$  oder  $C_2$  zu legen. Dies lässt sich in kompakter Matrixschreibweise zusammenfassen, die freie Zustandssumme lautet damit

$$Z_C^f(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) = N_2 \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \left( \frac{1}{2} j_a(x) D_{ab}^f(x-x') j_b(x') + \bar{\eta}_a(x) S_{ab}^f(x-x') \eta_b(x') \right) \right], \quad (2.29)$$

mit den Matrixpropagatoren  $D_{ab}^f(x-x')$  und  $S_{ab}^f(x-x')$ . Dabei hat man zu berücksichtigen, dass die Integration auf  $C_2$  ursprünglich die Richtung  $+\infty \cdots -\infty$  hatte. Da wir die Konturintegration zugunsten eines Matrixpropagators aufgegeben haben, ist es zweckmäßig auch die Funktional-Differentiation wieder in die übliche zu überführen

$$\frac{\delta j_a(x)}{\delta j_b(x')} = \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-x') \quad (2.30)$$

und entsprechend für die fermionischen Quellen. Man erhält schließlich als endgültige Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z_C(\beta, j, \eta, \bar{\eta}) &= \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\psi_2 \mathcal{D}\bar{\psi}_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_2 \\ &\exp \left[ -i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \left( \frac{1}{2} \varphi_a(x) ((D^f)^{-1})_{ab}(x-x') \varphi_b(x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\psi}_a(x) ((S^f)^{-1})_{ab}(x-x') \psi_b(x') \right) \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi_1, \psi_1, \bar{\psi}_1) - \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi_2, \psi_2, \bar{\psi}_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left( j_a(x) \varphi_a(x) + \bar{\eta}_a(x) \psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x) \eta(x) \right) \right], \quad (2.31) \end{aligned}$$

von der nun Feynman-Regeln in der gängigen Weise abgeleitet werden können. Bemerkenswert ist, dass im Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte keine Mischungen von Eins- und

Zwei-Feldern auftreten. D.h. es gibt auf Tree-Niveau außer in den Propagatoren keinerlei Eins-Zwei-Mischungen. Erst durch Loop-Effekte werden effektiv solche Kopplungen generiert. Ein effektiver 1122-Vier-Skalar-Vertex wird z.B. durch folgendes Diagramm generiert:

$$(2.32)$$

Die “Geistfelder”  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$  und  $\bar{\psi}_2$  haben als äußere Felder keine physikalische Bedeutung. Man wird also nur Graphen mit Eins-Feldern als äußere Felder betrachten. Trotzdem ist die Matrixform der Propagatoren unerlässlich um eine konsistente Störungsentwicklung zu erhalten. Dabei tritt eine Auslöschung von Divergenzen auf, die schon vor dieser formalen Formulierung zu einer heuristischen Einführung dieser Geistfelder geführt hat. Die Matrix-Propagatoren lassen sich nun direkt aus den Kontur-Propagatoren Gl. 2.23 durch Einsetzen der entsprechenden Quellfunktion berechnen. Man erhält

$$D(k) = \begin{pmatrix} \Delta_0^b & (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(-k_0)e^{\sigma k_0} \\ (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(k_0)e^{-\sigma k_0} & -\Delta_0^{b*} \end{pmatrix} + (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})N_{\text{BE}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & e^{\sigma k_0} \\ e^{-\sigma k_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$S(k) = \begin{pmatrix} \Delta_0^f & (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(-k_0)e^{\sigma k_0} \\ (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(k_0)e^{-\sigma k_0} & -\Delta_0^{f*} \end{pmatrix} - (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})N_{\text{FD}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & e^{\sigma k_0} \\ e^{-\sigma k_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

mit

$$\Delta_0^b = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 + i\epsilon}, \quad \Delta_0^{b*} = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 - i\epsilon} \quad (2.35)$$

$$\Delta_0^f = \frac{1}{\not{k} - m_\psi + i\epsilon}, \quad \Delta_0^{f*} = \frac{1}{\not{k} - m_\psi - i\epsilon}. \quad (2.36)$$

Als besonders nützlich erweist sich desweiteren als spezielle Wahl der Kontur der sog. “Closed-Time-Path” (CTP). Das ist der Grenzfall  $\sigma \rightarrow 0^-$ . Da der vertikale Teil der Kontur ja nur in Form einer multiplikativen Konstante beiträgt, reduziert sich in dieser speziellen Wahl die Kontur auf die reelle Achse, die in positiver und negativer Richtung durchlaufen wird, siehe Abb. 2.3.

Die Propagatoren vereinfachen sich dann zu

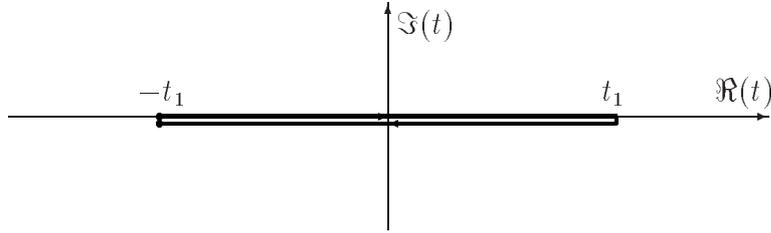


Abbildung 2.3: Grafische Darstellung der “Closed-Time-Path” Kontur.

$$\begin{aligned}
 D(k) = & \begin{pmatrix} \Delta_0^b & (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(-k_0) \\ (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(k_0) & -\Delta_0^{b*} \end{pmatrix} \\
 & + (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})N_{\text{BE}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(k) = & \begin{pmatrix} \Delta_0^f & (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(-k_0) \\ (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(k_0) & -\Delta_0^{f*} \end{pmatrix} \\
 & - (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})N_{\text{FD}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Da physikalische Ergebnisse von  $\sigma$  nicht abhängen, was sich beweisen lässt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit diese Wahl treffen. Das ist nun die endgültige Form der Propagatoren, auf die wir uns in dieser Arbeit stützen werden. Wir schließen damit unseren kurzen Überblick über die Formulierung thermaler Quantenfeldtheorie – eine tiefere Darstellung findet sich z.B. in [28–32] – und kommen nun zur Darstellung der wilsonschen Renormierungsgruppe.

## 2.2. Die wilsonsche Renormierungsgruppe

Die Idee der Renormierungsgruppe, wie wir sie hier darstellen wollen, wurde von Wilson, Kogut [33–35] und Kadanoff [36] erfolgreich für Probleme der statistischen Physik entwickelt und erst später in dieser Formulierung auf die Quantenfeldtheorie angewendet [44]. Dieser Ansatz hat dabei den Vorteil, intuitiv zu sein und die physikalische Grundidee transparent zu zeigen. Daneben wurde in der Quantenfeldtheorie eine etwas unterschiedliche und formale Formulierung der Renormierungsgruppe von Stueckelberg und Petermann [38] und Gell-Mann und Low [39] entwickelt. Wir werden bei unserer Darstellung als “Sprachbasis” ein ferromagnetisches Ising-artiges System wählen. Die gemachten Aussagen gelten aber in einem viel allgemeineren Zusammenhang.

Ein wichtiger Parameter bei Vielteilchensystemen ist die sog. Korrelationslänge  $\xi$ . Sie gibt an, ab welcher Systemgröße man praktisch den thermodynamischen Limes erreicht hat. Betrachtet man also ein Volumen der Größe der Korrelationslänge, werden alle physikalischen Effekte richtig erfasst. Beschränkt man sich dagegen bei der Berechnung auf ein kleineres Volumen, sind deutliche Abweichungen zu erwarten. Während es nun für Probleme mit wenigen Freiheitsgraden in einem Volumen der Größe der Korrelationslänge viele Lösungsmethoden gibt, wie z.B. Störungstheorie, Virialentwicklung usw., scheitert man damit hingegen bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden innerhalb einer Korrelationslänge. Phasenübergänge, speziell Übergänge zweiter Ordnung, wie wir sie in dieser Arbeit studieren wollen, zeichnen sich aber gerade durch große Korrelationslängen aus. Die Korrelationslänge divergiert bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung am kritischen Punkt sogar, was z.B. zur kritischen Opaleszenz am gasförmig-flüssig Phasenübergang führt. Quantenfeldtheorie selbst, auch ohne thermale Effekte, ist immer ein System sehr vieler (unendlich vieler) Freiheitsgrade und gerade die Renormierungsgruppen-Formulierung hat erst die tiefe Verwandtschaft zwischen Quantenfeldtheorie und der Theorie kritischer Phänomene aufgezeigt [37].

Genau wie Systeme mit geringer Anzahl von Freiheitsgraden werden viele Systeme mit großer Anzahl von Freiheitsgraden innerhalb einer Korrelationslänge lediglich durch Wechselwirkungen der nächsten Nachbarn (oder zumindestens durch lokale Wechselwirkungen) dominiert, andernfalls wäre auch der Renormierungsgruppen-Ansatz zum Scheitern verurteilt. Trotzdem ist bei großen Korrelationslängen eine Berücksichtigung kollektiver Phänomene zwingend. Ein Unterschied zu Systemen mit kleiner Korrelationslänge besteht zudem darin, dass interessanterweise für viele makroskopische Größen die genaue Form der mikroskopischen Wechselwirkung nächster Nachbarn gar keine Rolle spielt. Vielmehr ist die Anzahl von Freiheitsgraden innerhalb der Korrelationslänge der entscheidende Parameter. Dieser wird in einer Quantenfeldtheorie durch die Dimensionalität des Raumes sowie die Anzahl der unabhängigen Variablen in der Lagrangedichte festgelegt. D.h. viele physikalisch sehr unterschiedliche Theorien mit großer Korrelationslänge aber auch mit der gleichen Zahl von unabhängigen Variablen zeigen das gleiche Infrarot-Verhalten am Phasenübergang. Dies wird allgemein als Universalitätshypothese bezeichnet. Theorien mit dem gleichen Infrarot-Verhalten gehören zur gleichen Universalitätsklasse [40]. Universell sind die kritischen Exponenten und Amplitudenverhältnisse, während die Amplituden selbst sowie die kritische Temperatur nicht-universell sind, also von der mikroskopischen (ultraviolett) Physik abhängen. Z. B. zeigt die Korrelationslänge selbst universelles kritisches Verhalten

$$\xi(T) \sim (T - T_c)^{-\nu} , \quad (2.39)$$

mit dem (universellen) kritischen Exponenten  $\nu$ . Auch andere Größen, wie die Magnetisierung, die dem Ordnungsparameter entspricht, zeigen kritisches Verhalten

$$M \sim \langle s \rangle \sim (T - T_c)^\beta , \quad (2.40)$$

mit  $\beta$  bzw. die Suszeptibilität

$$\zeta \sim (T - T_c)^{-\gamma} , \quad (2.41)$$

mit  $\gamma$  sowie die Wärmekapazität

$$c_V \sim (T - T_c)^{-\alpha} , \quad (2.42)$$

mit  $\alpha$ . Diese kritischen Exponenten sind jeweils oberhalb und unterhalb des Phasenübergangs definiert (außer  $\nu$ , der Ordnungsparameter ist ja exakt Null oberhalb der kritischen Temperatur), haben aber oft den gleichen Wert. Im Allgemeinen kann dieses Potenzverhalten noch logarithmische Korrekturen erhalten. Der Exponent  $\eta$ , der auch als anomale Dimension bezeichnet wird, beschreibt die Abweichung der Paar-Korrelationsfunktion am kritischen Punkt

$$g(x, x') = \langle S(x)S(x') \rangle - \langle S(x) \rangle \langle S(x') \rangle \xrightarrow{|\vec{x}-\vec{x}'| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^{d-2+\eta}} \quad (2.43)$$

vom reinen Ornstein-Zernike-Verhalten [41, 42]

$$g(x, x') \sim \frac{\exp\left(-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\xi}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.44)$$

für das  $\eta = 3 - d$  gelten würde. Daneben existieren eine Reihe von Gleichungen, die diese kritischen Exponenten miteinander in Beziehung setzen und allgemein als Skalengesetze bezeichnet werden. D. h. die Anzahl der unabhängigen Parameter, die dieses kritische Verhalten beschreiben, ist kleiner als die Anzahl der Exponenten. Im Allgemeinen reichen zwei unabhängige Parameter zur Beschreibung aus. Diese Skalengesetze beruhen auf der Kadanoffschen Idee zur Blockspin-Renormierungsgruppe [36] und können in der moderneren Formulierung der Renormierungsgruppe von Wilson [33, 34] bewiesen werden. So gilt z.B.

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (2.45)$$

Auffallend ist weiterhin, dass die divergente Korrelationslänge dabei sogar entscheidend für die Universalität ist. Bei einem Phasenübergang erster Ordnung, bei dem die Korrelationslänge immer endlich bleibt, tritt kein universelles Verhalten auf. (Trotzdem lässt sich auch ein Phasenübergang erster Ordnung, als Nichtanalytizität thermodynamischer Variablen, nur im thermodynamischen Limes beschreiben). Nur bei divergenter Korrelationslänge erhält man Fluktuationen auf Längenskalen, die wesentlich größer sind als alle intrinsischen Skalen der Theorie und damit universelles Verhalten.

Wir sehen, das Auftreten einer divergenten Korrelationslänge und damit verbunden von IR-Singularitäten stellt ein physikalisch äußerst schwieriges Problem dar. Wie kann die Renormierungsgruppe hier nun helfen? Die Grundidee der Renormierungsgruppe lässt sich am besten mit dem Stichwort "Reduktion der Freiheitsgrade" beschreiben. Wir wollen uns dies zunächst schematisch klar machen, ohne zu großen Wert auf exakte Relationen zu legen. Man betrachte ein System aus  $N$  Teilchen. Wir nehmen weiter an, dass die Teilchen eine intrinsische Eigenschaft z.B. einen Spin  $s$  haben, die wir untersuchen wollen. Die Wechselwirkung jedes dieser Teilchen mit seiner Umgebung wird durch die Hamiltonfunktion  $H_0$  beschrieben. Wie bereits erwähnt lassen wir nur lokale Wechselwirkungen zu, die Reichweite soll also auf maximal einige Teilchenabstände beschränkt sein. Nun fassen wir jeweils einige Teilchen zu Subsystemen der Größe  $L_1$  zusammen. Man definiert nun einen Mittelwert dieser Eigenschaft  $S_1$  in diesen Subsystemen. Die Hamiltonfunktion  $H_1$  soll die Wechselwirkung jedes der Subsysteme mit seinen Nachbarsystemen beschreiben. Da die ursprüngliche Wechselwirkung lokal war, wird auch  $H_1$

lokal sein. Die Idee der Renormierungsgruppe besteht nun darin diese neue Hamiltonfunktion  $H_1$  nicht direkt zu berechnen, sondern durch eine geeignete Transformation  $\tau$  aus  $H_0$  zu bestimmen:

$$H_1 = \tau(H_0) \quad (2.46)$$

Da diese Subsysteme einige Teilchen enthalten, aber nun nur noch durch eine einzige Variable beschrieben werden, wurde effektiv die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert. Dieses Vorgehen kann nun auf die Subsysteme erneut angewendet werden. Damit wird sukzessive die Anzahl der Freiheitsgrade immer weiter reduziert. Letztlich muss die Transformation so oft angewendet werden, bis die Systemgröße  $L_n$  die Korrelationslänge überschreitet. Dann sind keine Veränderungen mehr zu erwarten. Von besonderem Interesse sind die Fixpunkte der Transformation

$$\tau(H_{\text{FP}}) = H_{\text{FP}} . \quad (2.47)$$

Ein Fixpunkt ist, wie sofort ersichtlich ist, eine intrinsische Eigenschaft der Transformation  $\tau(H)$  und somit unabhängig von den speziellen Anfangsbedingungen  $H_0$ . Fixpunkte entsprechen somit den universellen Größen, die wir zuvor bereits diskutiert haben. Lediglich wenn es mehrere Fixpunkt-Hamiltonfunktionen gibt, was im Prinzip möglich ist, führen nicht alle Anfangsbedingungen zu derselben Fixpunkt-Hamiltonfunktion. Vielmehr führen bestimmte Regionen im Parameterraum der Anfangsbedingungen zu einer bestimmten Fixpunkt-Hamiltonfunktion. Diese Regionen bezeichnet man als Domänen, innerhalb derer wieder Universalität gilt.

### 2.2.1. Die Blockspin-Renormierungsgruppe

Wir betrachten ein kubisches Gitter in 2-Dimensionen, (im Allgemeinen in  $d$ -Dimensionen). An jedem Gitterpunkt sitzt ein Spin, der die Werte  $\sigma = \pm 1$  annehmen kann, d.h. wir betrachten ein Beispiel für das wohlbekanntes Ising-Modell. Die einzelnen Spins wechselwirken jeweils nur mit ihren nächsten Nachbarn (n.N.). Die Hamiltonfunktion für dieses Ising-Modell lautet

$$H = -J \sum_n \sum_{i=n.N.} s_n s_i + \mu B \sum_n s_n , \quad (2.48)$$

d.h. die Energie/ $k_B T$  zwischen zwei benachbarten Spins ist  $K = J/k_B T$ . Wir wollen nur den Fall ohne äußeres Magnetfeld betrachten. Dieser spezielle Fall (zweidimensional ohne äußeres Magnetfeld) lässt sich sogar analytisch lösen (Onsager [43]). Mit äußerem Magnetfeld bzw. in höherdimensionalen Modellen ist dies aber nicht mehr möglich. Hier kann das Modell in der sog. Mean Field Näherung – d.h. man ersetzt die Wechselwirkung eines Spins mit seinen Nachbarn durch eine Wechselwirkung mit einem mittleren Feld, welches die anderen Spins erzeugen – gelöst werden. Es zeigt sich jedoch, dass die universellen Größen in niedrigdimensionalen Systemen nicht richtig wiedergegeben werden, erst für Systeme mit  $d > 4$  liefert die Mean Field Näherung die richtigen Ergebnisse.

Die Blockspintransformation besteht nun darin, jeweils 4 Spins zu einem Block zusammenzufassen. Wir nehmen weiter an, dass die Spins in diesen Blöcken stark korreliert sind und der Mittelwert wiederum nur die Werte  $\pm 1$  annehmen kann. (Dabei wurde der Wert von  $\pm 4$  auf  $\pm 1$

renormiert). Die Energie/ $k_B T$  zwischen diesen neuen Blockspins soll nun durch eine geeignete Transformation aus  $K$  berechenbar sein:  $K_1 = \tau(K)$ . Wären alle Spins in dem Block vollständig korreliert, wäre der Zusammenhang einfach

$$K_1 = 2K \quad (2.49)$$

(siehe Abbildung 2.2.1), was aber zu einem Widerspruch führen würde, wie wir sehen werden. Für die Korrelationslänge in den Einheiten dieses neuen Blockgitters gilt dann

$$\xi(K_1) = \xi(\tau(K)) = \frac{1}{2}\xi(K) . \quad (2.50)$$

Betrachten wir das System bei dem kritischen Wert von  $K_c = J/kT_c$ . Da die Korrelationslänge am kritischen Punkt divergiert, muß hier

$$\tau(K_c) = K_c \quad (2.51)$$

gelten um Gl. 2.50 erfüllen zu können. Das aber ist nicht mit Gl. 2.49 vereinbar. Die Schwierigkeit besteht nun also darin die Funktion  $\tau(K)$  zu berechnen, die bisher lediglich durch Gl. 2.51 eingeschränkt ist. Dazu linearisiert man zunächst  $\tau(K)$  um  $K_c$ :

$$\tau(K) = \tau(K_c) + \left. \frac{d\tau(K)}{dK} \right|_{K_c} (K - K_c) \quad (2.52)$$

Damit erhält man zusammen mit Gl. 2.39, 2.50 und 2.51 für den kritischen Exponenten

$$\nu = \frac{\ln(2)}{\ln \left( \left. \frac{d\tau(K)}{dK} \right|_{K_c} \right)} . \quad (2.53)$$

Der Wert von  $\nu$  kann damit von dem Mean Field Wert  $\frac{1}{2}$  abweichen und hängt von der genauen Form von  $\tau(K)$  ab. Für das einfachste Modell, in dem  $\tau(K)$  berechnet werden kann, dem sog. gaußschen Modell, erhält man wieder den Mean Field Wert für  $\nu$ . (Siehe hierzu z.B. [35])

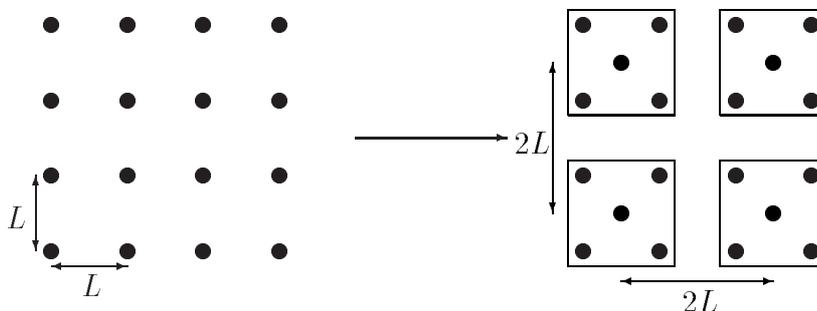


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung der Blockspin-Transformation. Die mittleren Punkte im rechten Bild stellen den Mittelwert-Spin der Blöcke dar.

### 2.2.2. Die kontinuierliche Renormierungsgruppe

In der Feldtheorie ist nun eine kontinuierliche Formulierung der Renormierungsgruppe meist zweckmäßiger. D.h. man betrachtet infinitesimale Veränderungen der Skala  $L \rightarrow (1 + \delta\lambda)L$ , die Transformation  $\tau$  wird dann zu einer Differenzialgleichungen für die skalenabhängige Hamiltonfunktion  $H_\lambda$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} H_\lambda = \mathcal{T}(H_\lambda) . \quad (2.54)$$

Ein Fixpunkt für die Hamilton-Funktion  $H_\lambda$  ist dann durch die Bedingung

$$\mathcal{T}(H_\lambda^*) = 0 \quad (2.55)$$

gegeben. Wir werden das im nächsten Kapitel, wenn wir die wilsonsche Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie diskutieren, direkt am Beispiel genauer erläutern. Zunächst wollen zeigen, wie das bisher Diskutierte direkt auf die Quantenfeldtheorie übertragen werden kann.

## 2.3. Statistische Physik und Quantenfeldtheorie

<b>Euklidische Quantenfeldtheorie</b>	<b>Statistische Physik - Magnetisches System</b>
Feld	Spin
Quelle	Magnetfeld
Euklidische Wirkung	Hamilton-Funktion
Vakuum Erwartungswert des Feldes	Magnetisierung
Statische Zwei-Punkt-Funktion	Magnetische Suszeptibilität
Physikalische Masse	Inverse Korrelationslänge
Masselose Theorie	Kritische Theorie
Erzeugendes Funktional $Z$	Zustandssumme
Erzeugendes Funktional $W$	Freie Energie
Erzeugendes Funktional $\Gamma$	Thermodynamisches Potenzial

Tabelle 2.1: “Übersetzungstabelle” zwischen euklidischer Quantenfeldtheorie und statistischer Physik.

Nicht nur die Renormierungsgruppen-Methoden lassen sich sowohl für statistische Probleme und auf feldtheoretische Fragestellungen gleichermaßen anwenden, das Studium der Renormierungsgruppe hat vielmehr gezeigt, dass zwischen der Theorie der kritischen Phänomene und relativistischer Quantenfeldtheorie ein tiefer Zusammenhang besteht. Lediglich die Sprache dieser beiden Disziplinen ist unterschiedlich. So kann die Universalitätsaussage direkt übersetzt werden und bedeutet, dass lokale renormierbare Quantenfeldtheorien im Renormierungsgruppenbild dem IR-Fixpunkt nahe der Kritikalität entsprechen. Eine  $O(N)$ -symmetrische skalare Quantenfeldtheorie entspricht einer N-Vektor Spin-Theorie im Kontinuum-Limes. Wir müssen uns also

über den unterschiedlichen Sprachgebrauch dieser beiden Disziplinen klar werden, wofür die “Übersetzungstabelle” 2.1 sehr nützlich ist [37].

Damit können nun einerseits feldtheoretische Methoden genutzt werden um das kritische Verhalten statistischer Systeme zu berechnen, zum anderen können feldtheoretische Konzepte in Festkörperexperimenten getestet werden. So kann das kritische Verhalten von  $O(N)$ -Modellen in einer Reihe verschiedener Experimente getestet werden. Das  $O(0)$ -Modell entspricht dem statistischen Verhalten von langen Polymeren, das  $O(1)$ -Modell (Ising) dem gasförmig-flüssig Übergang klassischer Flüssigkeiten, der Suprafluiditätsübergang in Helium-3 wird durch das  $O(2)$ -Modell und ferromagnetische Systeme schließlich durch das  $O(3)$ -Modell beschrieben. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment (siehe Tab. 2.2) ist dabei teilweise beeindruckend.

Daneben gibt es neue Experimente, die sich mit der Nichtgleichgewichtsdynamik am Phasenübergang befassen. Angeregt von Gill und Kibble [47] sowie Zurek [45, 46] wurden Experimente, die mögliche Phasenübergänge des frühen Universums in Laborexperimenten simulieren sollen, durchgeführt. Dabei wurde der Phasenübergang in nematischen Flüssigkristallen [48] sowie in suprafluidem Helium [49–51] untersucht. Diese Experimente scheinen momentan den Mechanismus der Defektbildung von Zurek zu unterstützen. Das ist für unser Projekt von besonderem Interesse, da dieser Mechanismus nur bei dem erwähnten “Critical Slowing Down” wirksam ist. Eine Bestimmung der Plasmon-Dämpfungsrate ist zur Erklärung dieses Mechanismus deshalb unbedingt erforderlich.

	$\gamma$	$\nu$	$\beta$	$\alpha$	$\delta$	$\eta$
$N = 0$	Theorie Exp.	$0.592 \pm 0.003$ $0.586 \pm 0.004$	$0.308 \pm 0.006$	$0.224 \pm 0.009$	4.77	0.04
$N = 1$	Theorie Exp.	$1.238 \pm 0,003$ $1.23 - 1.25$	$0.329 \pm 0.009$ $0.316 - 0.327$	$0.103 \pm 0.006$ $0.101 - 0.116$	4.76 4.92	0.044 0.012
$N = 2$	Theorie Exp.	$1.323 \pm 0.002$ $0.670 \pm 10^{-4}$	$0.350 \pm 0.005$	$-0.022 \pm 0.006$ $-0.013 \pm 0.003$	4.78	0.038
$N = 3$	Theorie Exp.	$1.396 \pm 0.003$ $1.40 \pm 0.03$	$0.369 \pm 0.005$ $0.35 \pm 0.03$	$-0.133 \pm 0.006$ $-0.09 - -0.012$	4.78 5	0.038 0
	Mean-Field	1	0.5	0	3	0

Tabelle 2.2: Vergleich kritischer Exponenten in Theorie und Experiment. Die theoretischen Werte wurden mittels Monte-Carlo-Methoden bestimmt, die experimentellen Ergebnisse nach den im Text beschriebenen Verfahren. Die Werte, die ohne Fehler angegeben wurden, wurden mittels Skalenrelationen bestimmt. Nach Ref. [37].



### 3. DIE WILSONSCHE RENORMIERUNGSGRUPPE IN DER QUANTENFELDTHEORIE

Die erste konkrete Anwendung der wilsonschen Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie stammt von Polchinski [44]. Während sich Polchinski in dieser Arbeit vor allem mit der Frage der Renormierbarkeit von Quantenfeldtheorien beschäftigte, wurde die Idee unter anderem von Wetterich et al. auf das kritische Verhalten euklidischer Quantenfeldtheorien angewendet. Die wilsonsche Renormierungsgruppe wird in diesem Zusammenhang meist als exakte Renormierungsgruppe bezeichnet [52–55, 57, 58]. Untersucht wurden in der Folge sowohl Theorien bei verschwindender als auch bei nicht-verschwindender Temperatur. Von besonderem Interesse sind Situationen, in denen Störungstheorie versagt. Die wilsonsche Renormierungsgruppe bietet prinzipiell einen nicht-perturbativen Zugang. Zwar kann die exakte Renormierungsgruppen-Gleichung nicht komplett gelöst werden und Trunkierungen und Approximationen sind notwendig, trotzdem behält sie ihren nicht-perturbativen Charakter bei: Die in der Approximation enthaltenen Effekte werden vollständig resummiert. Die wilsonsche Renormierungsgruppe kann damit für bestimmte Fragestellungen einen alternativen Zugang zu den sehr rechenzeitintensiven Gitter-Simulationen bieten. Als interessante Fragestellungen kommen vor allem Situationen in Frage, wenn Störungstheorie versagt, also einerseits stark wechselwirkende Theorien (siehe z.B. [59–62, 75–77]) und zum anderen Phasenübergänge in thermalen Feldtheorien (siehe z.B. [62–65, 76, 77]), da das divergente Infrarot-Verhalten kritischer Theorien ebenfalls zum Zusammenbruch der Störungstheorie führt.

#### 3.1. Euklidische Formulierung: Die exakte Renormierungsgruppe

Wir betrachten zunächst eine skalare Theorie. Ausgehend von einer euklidischen Feldtheorie führt man nun eine explizite Energieskala  $\Lambda$  ein. Die euklidische Wirkung wird so modifiziert, dass sie nur alle Moden enthält, für deren Viererimpulsquadrat  $k^2$  gilt  $k^2 > \Lambda^2$ . Solche Moden werden als harte Moden bezeichnet. Die weichen Moden mit  $k^2 < \Lambda^2$  hingegen sind nicht enthalten. Dies erzielt man durch einen modifizierten Propagator in der euklidischen Wirkung:

$$Z_\Lambda[j] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{1}{2}\phi(-k)D_\Lambda^{-1}(k^2)\phi(k) - S_{\text{int}} + j(-k)\phi(k) \right]} . \quad (3.1)$$

mit dem modifizierten inversen Propagator

$$D_\Lambda^{-1}(k^2) = \frac{D^{-1}(k^2)}{\Theta(\Lambda^2, k^2)} . \quad (3.2)$$

Der Propagator wurde mit einer Cut-off-Funktion modifiziert, die asymptotisch folgende Bedingungen erfüllen muss

$$\Theta(\Lambda^2, k^2) = \begin{cases} 1 & : k^2 \gg \Lambda^2 \\ 0 & : k^2 \ll \Lambda^2 \end{cases} . \quad (3.3)$$

Am anschaulichsten ist eine Stufenfunktion für diese Cut-off-Funktion. Allerdings führt diese Nichtanalytizität zu Komplikationen, man verwendet deshalb in der Regel kontinuierliche Funktionen, die die Bedingungen 3.3 erfüllen. Ein Beispiel für eine solche Cut-off-Funktion ist (siehe Abb. 3.1)

$$\Theta(\Lambda^2, k^2) = 1 - e^{-\frac{k^2}{\Lambda^2}} . \quad (3.4)$$

Die Aufteilung in harte und weiche Moden kann so nur in einer euklidischen Theorie vorgenommen werden, im Minkowski-Raum ist das Viererimpulsquadrat  $k^2$  nach unten nicht beschränkt und eine Unterscheidung der Moden anhand vom Viererimpulsquadrat hat keine physikalische Interpretation. Dieses Vorgehen ist direkt mit der Blockspin-Renormierungsgruppe zu vergleichen. Man arbeitet nun nur, wie erwähnt, erstens mit kontinuierlichen Variationen der Skala, und zum anderen nicht im Ortsraum, sondern im Impulsraum. Die Mittelung auf einem Gitter der Längenskala  $\Lambda^{-1}$  entspricht dem Ausintegrieren aller Moden mit Impulsen  $k^2 > \Lambda^2$ . Mit Ausintegrieren meint man, dass alle Moden mit  $k^2 > \Lambda^2$  bereits effektiv in den Parametern der Wirkung enthalten sind. Man definiert dadurch also Mittelwertfelder (makroskopische Felder) in Volumina der Größe  $\sim \Lambda^{-d}$ .

Bildet man den Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  erhält man in Gl. 3.1 das normale erzeugende Funktional der euklidischen Quantenfeldtheorie, bei jedem endlichen  $\Lambda$  ist Gl. 3.1 das erzeugende Funktional einer Theorie, die die kurzreichweitigen Fluktuationen bereits in den effektiven Parametern enthält. Ziel ist es nun, eine Gleichung aufzustellen, die die Änderung des erzeugenden Funktionals  $Z_\Lambda$  mit der äußeren Skala  $\Lambda$  beschreibt. Diese Gleichung formuliert man aus technischen Gründen besser für die effektive Mittelwert-Wirkung [56]<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_\Lambda[\varphi] &= -\ln(Z_\Lambda[j]) + j \cdot \varphi \\ \Gamma_\Lambda[\varphi] &= -\ln(Z_\Lambda[j]) + j \cdot \varphi - \frac{1}{2} \varphi \cdot D_\Lambda^{-1} \cdot \varphi \end{aligned} \quad (3.5)$$

anstatt für das volle erzeugende Funktional. Das Feld  $\varphi$  ist nun als klassisches Feld zu verstehen. Wir benützen dabei die abkürzende Notation

$$\begin{aligned} j \cdot \varphi &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j(-k) \varphi(k) \\ \varphi \cdot D_\Lambda^{-1} \cdot \varphi &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \varphi(-k) D_\Lambda^{-1}(k^2) \varphi(k) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wir wollen nochmals den Zusammenhang zur statistischen Physik betonen: das erzeugende Funktional für die zusammenhängenden greenschen Funktionen  $W_\Lambda = -\ln(Z_\Lambda)$  ist das quantenfeldtheoretische Pendant zur gemittelten freien Energie (sog. coarse grained free energy). Die

<sup>1</sup>Es ist üblich, hierbei eine leicht modifizierte Legendre-Transformation zu verwenden, die den trivialen kinetischen Term von der effektiven Wirkung subtrahiert.

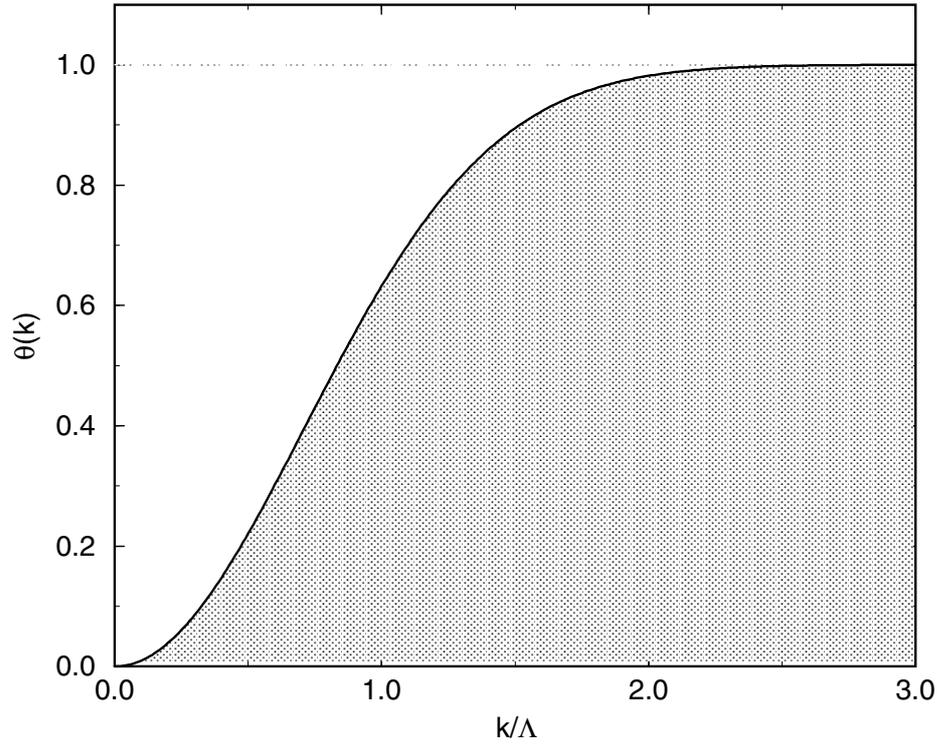


Abbildung 3.1: Beispiel einer Cut-off-Funktion, siehe Gl. 3.4. Die schraffierte Fläche symbolisiert die “ausintegrierten” Moden in der euklidischen Wirkung.

effektive Mittelwert-Wirkung  $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ , das erzeugende Funktional für die 1PI greenschen Funktionen, entspricht dem thermodynamischen Potenzial nach der Legendre-Transformation zur Magnetisierung als der thermodynamischen Variablen und wird auch teilweise als Gibbs-Potenzial bezeichnet.

Man erhält die sog. “exakte Flussgleichung” für die modifizierte effektive Mittelwert-Wirkung [56]:

$$\Lambda \frac{\partial \Gamma_\Lambda[\varphi]}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \Lambda \frac{\partial D_\Lambda^{-1}}{\partial \Lambda} \right) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\varphi]}{\delta \varphi \delta \varphi} + D_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \right] \quad (3.7)$$

Wichtig sind die Randbedingungen dieser Differenzialgleichung. Im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  sind im erzeugenden Funktional keinerlei Fluktuationen enthalten, man erhält folglich für die effektive Mittelwert-Wirkung die klassische Wirkung (minus des kinetischen Terms; Wir werden in Zukunft diesen Sachverhalt nicht mehr jedesmal erwähnen)<sup>2</sup>. Der andere Grenzfall  $\Lambda \rightarrow 0$  enthält Fluktuationen aller Skalen, die effektive Mittelwert-Wirkung wird damit zur effektiven (Quanten)-Wirkung:

<sup>2</sup>Die originale Formulierung von Wetterich et al. subtrahiert nur die Skalenabhängigkeit des klassischen kinetischen Terms  $R_\Lambda = D_\Lambda^{-1} - D^{-1}$ . Die Randbedingung ist dann wieder die klassische Wirkung. Wir verzichten in unserer Darstellung darauf, da die Parallele zur Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe dann offensichtlicher wird.

$$\Gamma_\Lambda[\varphi] \longrightarrow \begin{cases} S[\varphi] - \text{kin. Term} & , \Lambda \rightarrow \infty \\ \Gamma[\varphi] & , \Lambda \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Die exakte Flussgleichung interpoliert also zwischen der klassischen Wirkung und der quantenfeldtheoretischen effektiven Wirkung. Da diese Flussgleichung exakt ist, stellt sie einen nicht-perturbativen Zugang dar, die Quantenfeldtheorie aus der klassischen Theorie zu berechnen. Die exakte Flussgleichung ist formal eine Ein-Loop-Beziehung, wobei der erste Ausdruck in der Spur die Änderung des nackten Cut-off-Propagators mit  $\Lambda$  und der zweite Ausdruck den vollen Propagator beschreibt. Grafisch lässt sich diese exakte Flussgleichung also durch folgendes Diagramm veranschaulichen:

$$\Lambda \partial_\Lambda \bar{\Gamma}_\Lambda[\varphi] = \text{Diagramm} \quad (3.9)$$

Dieser Ein-Loop-Charakter wird auch deutlich, wenn man eine Ableitung  $\tilde{\partial}_\Lambda$  definiert, die nur auf explizite Skalenabhängigkeiten wirkt<sup>3</sup>. Mit dieser Definition erhält die exakte Flussgleichung 3.7 dann die Form

$$\Lambda \frac{\partial \Gamma_\Lambda[\varphi]}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \Lambda \tilde{\partial}_\Lambda \ln \left( D_\Lambda^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\varphi]}{\delta \varphi \delta \varphi} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Wir betonen aber ausdrücklich, dass dieser Ein-Loop-Charakter rein formal ist. Der volle Propagator auf der rechten Seite der Flussgleichung enthält selbst wieder Loop-Beiträge, die Flussgleichung resummiert daher alle Beiträge vollständig! Dadurch wird aus der Ein-Loop-Gleichung eine exakte Beziehung.

Wir wollen weitere grundsätzliche Aspekte dieser Formulierung diskutieren:

- Die Spur in der exakten Renormierungsgruppen-Gleichung 3.7 wird dominiert von Impulsbeiträgen  $k \sim \Lambda$ , da die Cut-off-Funktion hier die stärkste Änderung erfährt. In der Spur auf der rechten Seite der Flussgleichung taucht ja als Multiplikator die Ableitung des nackten Propagator auf. Es werden damit bei dem Integrationsschritt  $\Lambda \rightarrow \Lambda - \delta \Lambda$  gleichsam alle Moden in der Impulsschale  $[\Lambda - \delta \Lambda, \Lambda]$  ausintegriert. Durch den weichen Cut-off wird dieses Ausintegrieren von Impulsschalen etwas verschmiert.
- Diese Formulierung lässt sich leicht auf Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur verallgemeinern. Da man hier im euklidischen Raum arbeitet, sind lediglich die Propagatoren durch Matsubara-Propagatoren zu ersetzen. Die Renormierungsgruppe resummiert dann

<sup>3</sup>Die Schreibweise, eine totale Ableitung mit  $\partial$  zu bezeichnen, ist in der Literatur üblich. Wir werden sie deshalb beibehalten

Quantenfluktuationen und thermische Fluktuationen gleichermaßen. Die Randbedingung für  $\Lambda \rightarrow \infty$  ist dann die klassische Wirkung.

- Die Einführung der äußeren Energieskala stellt einen zusätzlichen Infrarot-Cut-off dar, der mögliche vorhandene Infrarot-Singularitäten der Theorie regularisiert. Der Grenzübergang  $\Lambda \rightarrow 0$  ist wohldefiniert, das Infrarot-Verhalten der Theorie damit vollständig unter Kontrolle. Das ist speziell für die Anwendung auf Theorien in einem nicht-trivialen Hintergrund wichtig (endliche Temperatur und/oder chemisches Potenzial). Wie wir ausführlich dargelegt haben, ist das Infrarot-Verhalten speziell an Phasenübergängen zweiter Ordnung äußerst problematisch. Da die wilsonsche Renormierungsgruppe gerade für solche Situationen entwickelt wurde, ist es nicht erstaunlich, dass auch bei ihrer Anwendung auf die Quantenfeldtheorie diese Probleme gelöst werden.
- Die Cut-off-Funktion muss so gewählt werden, dass sie die vorhandenen Symmetrien der Theorie respektiert. Für die Anwendung auf Eichtheorien erfordert das die Einführung modifizierter Slavnov-Taylor-Identitäten, was eine zusätzliche Schwierigkeit darstellt.

Wir werden die Eigenschaften der exakten Renormierungsgruppe im nächsten Kapitel mit den Eigenschaften der thermalen Renormierungsgruppe vergleichen und die Unterschiede weitergehend diskutieren. Für ein weiteres Studium der wilsonschen Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie bieten sich die Übersichtsartikel [67–70] an.

### 3.2. Die thermale Renormierungsgruppe

Kommen wir nun zu der Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe. Alle analytischen und numerischen Berechnungen bzgl. des chiralen Phasenübergangs in dieser Arbeit wurden mit dieser Formulierung durchgeführt, ein Teil dieser Arbeit besteht in der Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe für fermionische Felder [90]. Wie wir sehen werden, ist die Anwendung der thermalen Renormierungsgruppe auf fermionische Freiheitsgrade deutlich komplizierter als die Anwendung auf skalare Freiheitsgrade. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass die führenden thermalen Effekte für den vollen Skalar-Propagator in einem temperaturabhängigen Beitrag zur lokalen Masse bestehen, während sie für den Fermion-Propagator in einer komplizierten nicht-lokalen Struktur resultieren. Dies werden wir ausführlich diskutieren. Zunächst kommen wir zur Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe und der entsprechenden thermalen Flussgleichung. Diese Formulierung, die in Ref. [71] für Skalarfelder eingeführt wurde und dann auch auf Eichtheorien erweitert wurde [72], basiert auf der Tatsache, dass die Propagatoren in der Realzeit-Formulierung der thermalen Feldtheorie in einen temperaturabhängigen sowie einen temperaturunabhängigen Anteil separieren. Obschon man nun eine minkowskische Feldtheorie betrachtet, lassen sich Cut-off-Propagatoren definieren, indem man den Cut-off nur auf den thermalen Anteil der Propagatoren wirken lässt.

$$D(k^2) = D(k^2)_{(T=0)} + D(k^2)_{\text{therm.}} \longrightarrow D(k^2)_{(T=0)} + \Theta(|\vec{k}|, \Lambda) D(k^2)_{\text{therm.}} \quad (3.11)$$

Die thermalen Anteile sind immer On-Shell, weshalb man lediglich einen dreidimensionalen Cut-off einzuführen hat, eine physikalische Bedeutung von harten und weichen Moden ist für

diese On-Shell Anteile damit gegeben. Die Renormierungsgruppen-Gleichung resummiert somit lediglich thermale Fluktuationen und lässt die Quantenfluktuationen unberührt, was sich natürlich unter anderem auf die Randbedingungen auswirkt.

### 3.2.1. Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe

Die Propagatoren lassen sich wie in Abschnitt 2.1 gezeigt als kontur-zeitgeordnete Produkte von Feldoperatoren berechnen. Wir modifizieren die thermischen Erwartungswerte aus Gl. 2.20, 2.21, indem wir für die Verteilungsfunktionen folgende Ersetzung vornehmen:

$$\begin{aligned} N_{\text{BE}}(\omega_k) &\rightarrow N_{\text{BE}}(\omega_k, |\vec{k}|, \Lambda) = \Theta(|\vec{k}|, \Lambda) N_{\text{BE}}(\omega_k) \\ N_{\text{FD}}(\omega_k) &\rightarrow N_{\text{FD}}(\omega_k, |\vec{k}|, \Lambda) = \Theta(|\vec{k}|, \Lambda) N_{\text{FD}}(\omega_k) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Cut-off-Funktion wird so gewählt, dass sich die Verteilungsfunktionen asymptotisch verhalten wie

$$\begin{aligned} N_{\text{BE}}(\omega_k, |\vec{k}|, \Lambda) &\rightarrow \begin{cases} N_{\text{BE}}(\omega_k) & \text{für } |\vec{k}| \gg \Lambda \\ 0 & \text{für } |\vec{k}| \ll \Lambda \end{cases} \\ N_{\text{FD}}(\omega_k, |\vec{k}|, \Lambda) &\rightarrow \begin{cases} N_{\text{FD}}(\omega_k) & \text{für } |\vec{k}| \gg \Lambda \\ 0 & \text{für } |\vec{k}| \ll \Lambda \end{cases} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

D.h. alle Moden mit Impulsen größer als die Cut-off-Skala, also die harten Moden, befinden sich im thermischen Gleichgewicht, während die weichen Moden reine Quantenmoden sind. Wir werden in dieser Arbeit stets eine scharfe Cut-off-Funktion (Stufenfunktion)

$$\Theta(|\vec{k}|, \Lambda) = \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \quad (3.14)$$

verwenden. Aufgrund der Struktur der thermalen Renormierungsgruppe scheint der Einsatz einer scharfen Cut-off-Funktion unproblematischer zu sein als in der exakten Renormierungsgruppe. Die erzielten Ergebnisse rechtfertigen dieses Vorgehen. Ob das immer gilt, speziell auch für die Berechnung anomaler Dimensionen und Imaginärteile, muss aber noch genauer untersucht werden. Mit den so modifizierten thermalen Erwartungswerten analog zu Gl. 2.20, 2.21

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{BE}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{a}(k) \mathbf{a}^\dagger(k') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k \left( 1 + N_{\text{BE}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \right) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{b}^\dagger(k, s) \mathbf{b}(k', s') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{FD}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{d}^\dagger(k, s) \mathbf{d}(k', s') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k N_{\text{FD}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{b}(k, s) \mathbf{b}^\dagger(k', s') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k \left( 1 - N_{\text{FD}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \right) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle \mathbf{d}(k, s) \mathbf{d}^\dagger(k', s') \rangle_\beta^\Lambda &= (2\pi)^3 2\omega_k \left( 1 - N_{\text{FD}}(\omega_k) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \right) \delta_{ss'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') , \end{aligned} \quad (3.15)$$

erhält man auf die zuvor beschriebene Art die Kontur-Cut-off-Propagatoren

$$\begin{aligned}
iD_{c,\Lambda}(x, x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m_\varphi^2) e^{-ik(x-x')} \\
&\quad \left[ \theta_C(t-t')\theta(k_0) + \theta_C(t'-t)\theta(-k_0) + \theta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{BE}}(|k_0|) \right], \\
iS_{c,\Lambda}(x, x')_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m_\psi^2) (\not{k} + m_\psi)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-x')} \\
&\quad \left[ \theta_C(t-t')\theta(k_0) + \theta_C(t'-t)\theta(-k_0) - \theta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{FD}}(|k_0|) \right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Dieses Vorgehen kann man alternativ auch folgendermaßen verstehen. Eine freie Theorie wird durch eine Dichtematrix der Form (für ein Skalarfeld)

$$\varrho_f = C \exp \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \beta\omega_k \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k) \right] \quad (3.17)$$

beschrieben. Wir führen nun anstatt des Produkts  $\beta\omega_k$  eine impulsabhängige Funktion  $f(|\vec{k}|, \Lambda)$  ein

$$\varrho_f = C \exp \left[ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(|\vec{k}|, \Lambda) \mathbf{a}^\dagger(k) \mathbf{a}(k) \right]. \quad (3.18)$$

Diese impulsabhängige Funktion soll das asymptotische Verhalten

$$f(|\vec{k}|, \Lambda) \rightarrow \begin{cases} \beta\omega_k & \text{für } |\vec{k}| \gg \Lambda \\ \infty & \text{für } |\vec{k}| \ll \Lambda \end{cases} \quad (3.19)$$

zeigen. D.h. wir nehmen für das System eine Dichte-Matrix an, die einen speziellen Nichtgleichgewichtszustand beschreibt. Alle Moden mit großen Impulsen werden quasi durch einen Gleichgewichtszustand mit der inversen Temperatur  $\beta$  beschrieben, wohingegen alle Moden mit kleinen Impulsen sich in einem Gleichgewichtszustand mit verschwindender Temperatur befinden. (Von einer impulsabhängigen Temperatur zu sprechen ist allerdings genau genommen nicht statthaft, da die Dichtematrix keinen Gleichgewichtszustand beschreibt und deshalb für das Gesamtsystem als solches gar keine Temperatur definiert ist.)

Nun wählen wir die Integrationskontur wie in Kapitel 2.1 beschrieben und erhalten damit die Matrix-Cut-off-Propagatoren

$$\begin{aligned}
D_\Lambda(k) &= \begin{pmatrix} \Delta_0^b & (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(-k_0) \\ (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*})\theta(k_0) & -\Delta_0^{b*} \end{pmatrix} \\
&\quad + (\Delta_0^b - \Delta_0^{b*}) N_{\text{BE}}(|k_0|) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\Lambda(k) &= \begin{pmatrix} \Delta_0^f & (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(-k_0) \\ (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*})\theta(k_0) & -\Delta_0^{f*} \end{pmatrix} \\
&\quad - (\Delta_0^f - \Delta_0^{f*}) N_{\text{FD}}(|k_0|) \theta(|\vec{k}| - \Lambda) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

mit

$$\Delta_0^b = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 + i\epsilon}, \quad \Delta_0^{b*} = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 - i\epsilon} \quad (3.22)$$

$$\Delta_0^f = \frac{1}{\not{k} - m_\psi + i\epsilon}, \quad \Delta_0^{f*} = \frac{1}{\not{k} - m_\psi - i\epsilon}, \quad (3.23)$$

wie zuvor. Ersetzen wir wie bei der Formulierung der exakten Renormierungsgruppe die Propagatoren in dem euklidischen Funktional mit diesen auf spezielle Weise modifizierten Propagatoren, so erhalten wir das skalenabhängige erzeugende Funktional

$$Z_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ i \left( \frac{1}{2} \phi \cdot D_\Lambda^{-1} \cdot \phi + \bar{\psi} \cdot S_\Lambda^{-1} \cdot \psi + j \cdot \phi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + S_{\text{int}}[\phi, \psi, \bar{\psi}] \right) \right]. \quad (3.24)$$

Dieses enthält nun alle Quantenfluktuationen, aber nur thermische Fluktuationen, deren räumlicher Impuls größer als die äußere Skala  $\Lambda$  ist. Diese Moden sind im thermischen Gleichgewicht und in den effektiven Parametern des erzeugenden Funktionals enthalten. Die Moden, deren räumlicher Impuls kleiner als die Skala  $\Lambda$  ist, sind hingegen nicht im thermischen Gleichgewicht, lediglich ihre Quantenanteile sind in dem erzeugenden Funktional enthalten. Die Quantenanteile müssen in der Wirkung vollständig enthalten sein, eine Definition von hart und weich existiert für Off-Shell-Moden schließlich gar nicht. Wir benützen auch weiterhin immer die Notation

$$\begin{aligned} j \cdot \phi &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j(-k) \phi(k) \\ \phi \cdot D_\Lambda^{-1} \cdot \phi &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi(-k) D_\Lambda^{-1}(k^2) \phi(k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

und entsprechend für die Grassmann-Variablen. Die Grenzwerte dieses Cut-off-Funktional sind, wie sofort ersichtlich ist, andere als im Fall der exakten Renormierungsgruppe:

$$Z_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}] \longrightarrow \begin{cases} Z_{(T=0)}[j, \eta, \bar{\eta}] & \text{für } \Lambda \rightarrow \infty \\ Z_{\text{thermisch}}[j, \eta, \bar{\eta}] & \text{für } \Lambda \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Man erhält im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow \infty$  das erzeugende Funktional der  $(T=0)$ -Quantenfeldtheorie. Die thermischen Anteile aller Moden werden schließlich unterdrückt. Im anderen Grenzfall  $\Lambda \rightarrow 0$  wird die Zustandssumme hingegen nicht modifiziert und man erhält dementsprechend die volle thermalisierte Theorie. Die thermale Renormierungsgruppe interpoliert also zwischen der  $(T=0)$ -Quantenfeldtheorie und der thermalisierten Quantenfeldtheorie, die Quanteneffekte werden in den Renormierungsgruppenfluss nicht mit einbezogen.

Die Ableitung der Renormierungsgruppen-Gleichung für  $Z_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}]$  ist nun wieder durch eine einfache Rechnung möglich. Allerdings ist es auch hier günstiger stattdessen mit der effektiven Wirkung zu arbeiten. Wir benützen wie zuvor (siehe Gl. 3.5) eine leicht modifizierte effektive Wirkung

$$\Gamma_\Lambda[\varphi, \psi, \bar{\psi}] = -i \ln Z_\Lambda - J \cdot \varphi - \bar{\eta} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \eta - \frac{1}{2} \varphi \cdot D_\Lambda^{-1} \cdot \varphi - \bar{\psi} \cdot S_\Lambda^{-1} \cdot \psi. \quad (3.27)$$

Die Renormierungsgruppen-Gleichung für diese modifizierte effektive Wirkung lautet dann

$$\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\Phi] = \frac{i}{2} \text{STr} \left\{ (\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1}) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \right\}. \quad (3.28)$$

Zu einer effektiven Berücksichtigung der Vertauschungseigenschaften von Grassmann-Variablen verwenden wir den Superfeld-Formalismus. Die Eigenschaften der Superspur in Gl. 3.28 und deren genaue Ableitung sind in Anhang B detailliert beschrieben.  $\Phi$  bezeichnet ein Superfeld

$$\Phi = (\phi, \psi, \bar{\psi}), \quad \bar{\Phi} = (\phi, -\bar{\psi}, \psi). \quad (3.29)$$

Die inverse Matrix des nackten Super-Propagators lautet

$$\mathcal{D}_\Lambda^{-1}(k) = \begin{pmatrix} D_\Lambda^{-1}(k) & & \\ & S_\Lambda^{-1}(k) & \\ & & (S_\Lambda^{-1}(k))^T \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

die Form der Supermatrix in der Renormierungsgruppen-Gleichung ist gegeben durch

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \equiv \Gamma_\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \phi \delta \phi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \phi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \phi \delta \bar{\psi}} \\ -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \phi} & -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} & -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \bar{\psi}} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \phi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Weiterhin gilt es zu beachten, dass die Einträge dieser Matrizen noch Funktionen von Impulsen sind, sowie thermale, mögliche interne (durch vorhandene innere Symmetrien) sowie im Falle der Fermionen Dirac-Indizes tragen. Die Superspur summiert über all diese Abhängigkeiten. Die Renormierungsgruppen-Gleichungen der exakten und der thermalen Renormierungsgruppe haben sehr ähnliche Eigenschaften. Auch die Renormierungsgruppen-Gleichung der thermalen Renormierungsgruppe entspricht formal einem Ein-Loop-Diagramm, siehe 3.1. Da nur die thermalen Anteile der nackten Propagatoren von der Skala  $\Lambda$  abhängen, liefern allerdings nur die Ableitungen dieser Anteile nach der Skala Beiträge. Alle Beiträge zum Renormierungsgruppenfluss sind damit proportional zu einer statistischen Verteilungsfunktion. Es treten keine Beiträge auf, die nicht mit einer Verteilungsfunktion multipliziert sind.

Neben den Gemeinsamkeiten weisen der ERG und der TRG Ansatz aber auch gewisse Unterschiede auf, die wir nun kurz diskutieren wollen.

- Die exakte Renormierungsgruppe behandelt sowohl die Quanten- als auch die thermalen Fluktuationen. Deshalb ist die Randbedingung für  $\Lambda \rightarrow \infty$  die klassische Wirkung. Die exakte Renormierungsgruppe stellt damit Kopplungen der effektiven Wirkung bei einer bestimmten Temperatur mit den klassischen Kopplungen in Beziehung. Die Kopplungen dieser klassischen Wirkung entsprechen aber nicht direkt den physikalisch messbaren ( $T=0$ )-Kopplungen. Will man eine Verbindung zwischen Theorie und Experiment herstellen, so

würde man z.B. die  $(T = 0)$ -Kopplungen mit Kopplungen bei nicht-verschwindender Temperatur vergleichen. (Typischerweise würde man natürlich Wirkungsquerschnitte messen, daraus lassen sich aber die  $n$ -Punkt-Kopplungen der effektiven Wirkung bestimmen.) Um nun die experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Ergebnissen in Beziehung zu setzen muss man zusätzlich eine Verbindung zwischen den klassischen und den physikalischen  $(T = 0)$ -Kopplungen herstellen. Anders im Falle der thermalen Renormierungsgruppe. Hier werden nur die thermischen Fluktuationen behandelt, Randbedingung des Renormierungsflusses ist deshalb auch die effektive (Quanten-)Wirkung. Die thermale Renormierungsgruppe verknüpft deshalb direkt physikalisch messbare  $(T = 0)$ -Kopplungen mit Kopplungen bei nicht-verschwindender Temperatur. Es werden somit ausschließlich messbare Größen miteinander in Beziehung gesetzt. Natürlich hat man wieder das gleiche Problem wie im Fall der exakten Renormierungsgruppe, wenn man die  $(T = 0)$ -Kopplungen theoretisch aus z.B. einer renormierbaren Theorie, also aus einer klassischen Wirkung bestimmen will. Im Falle einer bei  $(T = 0)$  schwach gekoppelten Theorie könnte man das im Rahmen der Störungstheorie versuchen. Problematisch ist das vor allem im Fall einer bei  $(T = 0)$  stark gekoppelten Theorie. Dann müsste man dazu nicht-perturbative Methoden z.B. die exakte Renormierungsgruppe dafür anwenden. Im Prinzip ist man aber nicht auf diesen theoretischen Weg beschränkt. Man könnte sich auch vollständig auf die Verbindung messbarer Größen beschränken und alle Kopplungen der Start-Wirkung experimentell bestimmen.

Allerdings muss man leider feststellen, dass in stark gekoppelten Theorien wie z.B. QCD meist die asymptotischen Zustände im UV- und im IR-Limes nicht dieselben sind. Das führt ebenfalls zum Versagen des Renormierungsgruppen-Ansatzes. Dadurch wird dieser Weg ebenfalls limitiert, verhindert ihn aber nicht völlig, denn: Der Hauptbeitrag zum Renormierungsgruppenfluss kommt von Impulsen von der Ordnung der Temperatur. D.h. solange die Temperatur klein gegenüber der Skala ist, bei der eine Umlagerung zu anderen asymptotischen Freiheitsgraden stattfindet, kann die thermale Renormierungsgruppe das System näherungsweise beschreiben.

Alle diese Überlegungen sind nur für nicht-universelle Größen relevant, die universellen Eigenschaften sind ohnehin unabhängig von den Randbedingungen (zumindestens innerhalb der kritischen Domäne). Das kritische Verhalten wird im Wesentlichen durch die Symmetrien des Systems festgelegt, diese sind aber auch in der klassischen Wirkung enthalten. Man kann also zur Bestimmung universeller Eigenschaften auch in der thermalen Renormierungsgruppe die klassischen Kopplungen als Randbedingung einsetzen. Solange die gewählten asymptotischen Zustände geeignet sind einen Phasenübergang zu beschreiben, wird durch die Renormierungsgruppe das kritische Verhalten korrekt beschrieben.

- Die Erweiterung des Formalismus auf Eichtheorien ist für die thermale Renormierungsgruppe unproblematischer, da nur physikalische Moden behandelt werden. Deshalb hat man keine unphysikalischen Eichfreiheitsgrade mehr und die Einführung der externen Cut-off-Skala verletzt nicht die Eichinvarianz. Anders im Falle der exakten Renormierungsgruppe; hier muss durch modifizierte Slavnov-Taylor Identitäten die Eichinvarianz

erhalten werden, was zu einem notwendigen Fine-Tuning der Randbedingungen führt.

- Der für uns aber entscheidende Unterschied liegt in der Tatsache, dass in der thermalen Renormierungsgruppe direkt greensche Funktionen mit reellen Zeitargumenten berechnet werden. Im Falle der exakten Renormierungsgruppe müssen diese durch analytische Fortsetzung aus den greenschen Funktionen bei imaginären Zeitargumenten gewonnen werden. Da hier aber numerische Methoden notwendig sein werden, ist dieser Schritt nicht durchführbar und somit sind nicht-statische Größen in der exakten Renormierungsgruppe kaum zu berechnen. Da in der thermalen Renormierungsgruppe keine analytische Fortsetzung notwendig ist, ist der Einsatz numerischer Methoden unproblematisch und man kann nicht-statische Größen im Sinne einer Linear-Response-Theorie bestimmen.

Soweit die Eigenschaften dieser exakten Flussgleichungen. Könnte man diese Gleichungen für eine Theorie auch noch exakt lösen, hätte man diese Quantenfeldtheorie vollständig unter Kontrolle. Leider sind aber beide Ansätze weder analytisch noch numerisch geschlossen lösbar. Die Flussgleichungen 3.7 und 3.28 sind partielle Funktional-Integro-Differenzialgleichungen und entsprechen damit einem System unendlich vieler Integro-Differenzialgleichungen. Um zu einem lösbaren System zu gelangen bieten sich im Wesentlichen zwei Entwicklungen der effektiven Mittelwert-Wirkung an, die Entwicklung in  $n$ -Punkt-Funktionen und die Ableitungsentwicklung.

- Man entwickelt die effektive Wirkung in greenschen Funktionen. Die effektive Wirkung ist ja das erzeugende Funktional der 1PI greenschen Funktionen und hat die Entwicklung

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] = \sum_{n=j+k+l=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{\nu=1}^n \left( \int d^4 x_\nu \right) G_{\text{1PI},\Lambda}^{(j,k,l)}(x_1, \dots, x_n) \phi^j \psi^k \bar{\psi}^l. \quad (3.32)$$

Setzt man diese Entwicklung der effektiven Wirkung in Gl. 3.28 ein, erhält man ein gekoppeltes Differenzialgleichungssystem für die greenschen Funktionen. Dieses System ist zu keiner endlichen Ordnung geschlossen, d.h. die Flussgleichung für die  $n$ -Punkt-Funktion enthält selbst wieder  $m$ -Punkt-Funktionen mit ( $m > n$ ). Ähnliches Verhalten, dass ein gekoppeltes Gleichungssystem für greensche Funktionen zu keiner endlichen Ordnung schließt, kennt man auch von Schwinger-Dyson-Gleichungssystemen.

- Man entwickelt die effektive Wirkung in Potenzen von Feldableitungen. Der Term niedrigster Ordnung in dieser Ableitungsentwicklung ist das effektive Potenzial und mögliche lokale Fermion-Fermion- und Fermion-Skalar-Kopplungen. Die nächsten Terme enthalten unter anderem die Wellenfunktionsrenormierung. Diese Entwicklung der effektiven Wirkung lautet

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] = \int d^4 x \left\{ -U_\Lambda(\phi) + (Z_\Lambda(\phi) - 1) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right\}. \quad (3.33)$$

Eingesetzt in Gl. 3.28 erhält man ein System von gekoppelten Differenzialgleichungen für die Koeffizienten dieser Ableitungsentwicklung. Diese Koeffizienten sind noch Funktionen der Felder, können also beliebig viele Potenzen von Feldern enthalten.

Diese unendlichen Entwicklungen können tatsächlich nur bis zu einer endlichen Ordnung durchgeführt werden und müssen dann trunziert werden. Da sie bei einer trunzierten endlichen Ordnung nicht geschlossen sind, müssen die nächsten Ordnungen approximativ eingesetzt werden. Dies kann im einfachsten Fall sein, die nächsten Terme gleich Null zu setzen. Wir werden ein besseres Verfahren für diese Approximation der nächsten Terme anwenden.

Wir beschreiten in dieser Arbeit den zweiten Weg der Ableitungsentwicklung. Wir gehen dabei bis zur ersten Ordnung in den Skalarfeldern, berücksichtigen also das effektive, skalare Potenzial und eine Wellenfunktionsrenormierung der Skalarfelder. Andere Strukturen gleicher Ordnung in der Ableitungsentwicklung werden wir vernachlässigen. Wir werden für die Fermionen im Sinne der Ableitungsentwicklung lediglich einen Term 0.-Ordnung berücksichtigen. Dieser enthält eine Yukawa-Kopplung. Höhere Fermion-Fermion- und Fermion-Skalar-Kopplungen, die in dieser Ordnung der Ableitungsentwicklung enthalten sind, werden wir alle vernachlässigen. Das entspricht einer zusätzlichen lokalen, polynomialen Approximation dieses Anteils der Ableitungsentwicklung. Darüber hinaus werden wir noch Ansätze für die vollen Propagatoren benutzen. Für die Fermionen misslingt der Versuch einer auf der reinen Ableitungsentwicklung basierenden Form des vollen Fermionpropagators. Wir werden deshalb für den vollen Fermionpropagator einen zusätzlichen Term außerhalb der Ableitungsentwicklung berücksichtigen. Den Grund für das Misslingen der reinen Ableitungsentwicklung für die Fermionen werden wir noch ausführlich im Abschnitt 4.4 diskutieren, die Ansätze für die vollen Propagatoren werden wir im nächsten Kapitel motivieren.

Zunächst wollen wir aber noch eine weitere Komplikation diskutieren. Wir haben in der Renormierungsgruppen-Gleichungen bisher keine Indizes explizit ausgeschrieben. Da die Superspur über alle Indizes summiert, treten außerhalb der Superspur keine Indexstrukturen auf. Dies ist anders, wenn wir durch weiteres Funktional-Differenzieren Flussgleichungen für greensche Funktionen herleiten. Wir müssen uns dann entscheiden, nach welchem konkreten Feld wir die Ableitung durchführen und die Flussgleichung trägt dann diesen äußeren Index. Das gilt natürlich auch für die thermalen Indizes, die der Preis für die Wahl unserer Realzeit-Kontur waren. Wir werden also Flussgleichungen für greensche Funktionen mit thermalen Indizes erhalten. Wir wissen aber, dass uns physikalisch letztlich nur greensche Funktionen mit äußeren Eins-Feldern interessieren. Im Rahmen unserer Ableitungsentwicklung müssten wir aber auch alle Zwei- und gemischten Eins-Zwei-Funktionen berechnen. In den Loop-Diagrammen müssen diese schließlich alle summiert werden um eine konsistente Entwicklung zu bekommen. Dieses Problem kann aber etwas vereinfacht und letztlich wieder auf ein Feld reduziert werden. Die Idee hierzu basiert auf der Tatsache, dass die Theorie eine  $Z_2$  Symmetrie zwischen Eins- und Zwei-Feldern aufweist [25]

$$Z[j_1, j_2] = Z[-j_2, -j_1]^* . \quad (3.34)$$

Wir führen ein neues Funktional  $\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi]$  nur eines Feldes durch die Definition

$$\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi] = \Gamma_\Lambda[\Phi_1, \Phi_2[\Phi_1]]|_{\Phi_1=\Phi} \quad (3.35)$$

ein. Dabei ist das Feld  $\Phi_2$  durch seine Bewegungsgleichung

$$\left. \frac{\delta \Gamma_\Lambda[\Phi_1, \Phi_2]}{\delta \Phi_2} \right|_{\Phi_2=\Phi_2[\Phi_1]} = 0 \quad (3.36)$$

für ein beliebiges Feld  $\Phi_1$  festgelegt. Dadurch ist in dem neuen Funktional noch die gleiche Information wie zuvor enthalten, da es die Lösung der Bewegungsgleichung von  $\Phi_2$  enthält. Es ist damit möglich nur mit dem Funktional dieser einen Variablen zu rechnen, die Beiträge von dem ‘‘Geistfeld’’ sind implizit enthalten. Es bleibt zunächst die Frage offen, ob sich die Renormierungsgruppen-Gleichung in eine Gleichung für dieses neue Funktional umformulieren lässt. Natürlich könnten wir die Definition für  $\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi]$  Gl. 3.35 in die Renormierungsgruppen-Gleichung 3.28 einsetzen, eine Anwendung der resultierenden Gleichung würde aber nun eine Kenntnis der Lösung der Bewegungsgleichung von  $\Phi_2$  für beliebige  $\Phi_1$  voraussetzen. Damit haben wir scheinbar das Problem eher weiter verschlimmert als verbessert. Wir können aber die Definition von  $\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi]$  für in den Raumzeitvariablen konstante Feldkonfigurationen auch durch die Definition

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}[\Phi]}{\delta \Phi} = \left. \frac{\delta \Gamma[\Phi_1, \Phi_2]}{\delta \Phi_1} \right|_{\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi = \text{const.}} \quad (3.37)$$

ersetzen. Benützen wir dann diese Definition für  $\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi]$ , um eine Renormierungsgruppen-Gleichung für den Tadpole 3.37 abzuleiten, können wir diese, wie wir später sehen werden, vollständig in eine Gleichung für  $\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi]$  umwandeln. Eine Kenntnis von  $\Phi_2$  ist dann nicht mehr notwendig, da wir uns auf konstante Konfigurationen beschränkt haben. Dadurch lässt sich die Berechnung insgesamt vereinfachen. Um das zeigen zu können müssen wir aber die Struktur dieser Tadpole-Gleichung, die den sog. Kern enthält, genauer untersuchen. Wir leiten deshalb zunächst die Flussgleichungen für die verschiedenen greenschen Funktionen ab, die wir benötigen werden. Diese Flussgleichungen enthalten dann noch eine Summation über die thermalen Indizes, und wir werden später darlegen, wie wir das System auf das so definierte Feld  $\Phi$  reduzieren können.

### 3.2.2. Ableitung der Flussgleichungen für die greenschen Funktionen

Kommen wir also zur Aufstellung der Flussgleichungen für die verschiedenen greenschen Funktionen. Wir werden diese zunächst noch völlig modellunabhängig aufstellen und im nächsten Kapitel daraus die Gleichungen der einzelnen Terme der Ableitungsentwicklung isolieren. Das können wir aber erst sinnvoll durchführen, nachdem wir das konkrete Modell genau definiert haben und die Näherungen für die vollen Propagatoren festgelegt haben.

Der erste Term der Ableitungsentwicklung ist das skalare, effektive Potenzial. Die Flussgleichung für das skalare, effektive Potenzial isolieren wir aus dem sog. skalaren Tadpole-Diagramm. Dazu leiten wir unsere Master-Gleichung 3.28 nach dem Skalarfeld ab. Wir lassen offen, nach welchem Skalarfeld wir ableiten wollen, falls die Theorie mehrere skalare Freiheitsgrade enthält ebenso wie auch den thermalen Index  $j$  des Skalarfeldes, nach dem wir ableiten. Die Gleichung lautet damit

$$\Lambda \partial_\Lambda \left. \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j} \right|_{\varphi = \text{const.}, \bar{\psi} = \psi = 0} = - \frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \mathcal{K}_\Lambda \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right\} \Big|_{\varphi = \text{const.}, \bar{\psi} = \psi = 0} \quad (3.38)$$

Damit haben wir den sog. Kern definiert:

$$\mathcal{K}_\Lambda = \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} (\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1}) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} K_\Lambda^b & & \\ & K_\Lambda^f & \\ & & (K_\Lambda^f)^T \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Der Kern besteht aus der Kombination voller Propagator – Ableitung des nackten Propagators – voller Propagator. Er wird in allen Flussgleichungen immer wieder in dieser Kombination auftauchen, der bosonische bzw. der fermionische Anteil lauten

$$\begin{aligned} K_\Lambda^b &= \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi} + D_\Lambda^{-1} \right)^{-1} (\Lambda \partial_\Lambda D_\Lambda^{-1}) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi} + D_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \\ K_\Lambda^f &= \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} + S_\Lambda^{-1} \right)^{-1} (\Lambda \partial_\Lambda S_\Lambda^{-1}) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} + S_\Lambda^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für den transponierten fermionischen Kern. Alle anderen nicht-diagonalen Terme in Gl. 3.39 sind wegen ihrer Lorentzstruktur nach dem Konstantsetzen der Felder gleich Null und wurden deshalb gleich weggelassen. Bei einem weiteren Ableiten dieser Gleichung muss man natürlich zuerst alle Ableitungen vornehmen und dann die Felder auf den Vakuumzustand setzen. Man darf also nicht einfach die Ableitung des Kerns in der angegebenen Form bilden. Der nächste Schritt ist, die Superspur nach den Regeln in Anhang B auszuführen. Wir erhalten dann eine Summe von skalaren und fermionischen Beiträgen:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \left. \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j} \right|_{\varphi=\text{const.}, \bar{\psi}=\psi=0} &= \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \left[ K_\Lambda^b \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \varphi \delta \varphi} + K_\Lambda^f \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \bar{\psi} \delta \psi} - (K_\Lambda^f)^T \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \psi \delta \bar{\psi}} \right] \Big|_{\varphi=\text{const.}, \bar{\psi}=\psi=0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dabei haben wir wiederum alle Terme, die aufgrund ihrer Lorentzstruktur letztlich verschwinden werden, weggelassen und nur die von Null verschiedenen Terme aufgeführt. Diese Beiträge lassen sich diagrammatisch veranschaulichen, die Gleichung für den skalaren Tadpole lautet damit:

$$\Lambda \partial_\Lambda \left. \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j} \right|_{\varphi=\text{const.}, \bar{\psi}=\psi=0} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} = \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (3.42)$$

Der transponierte Anteil (der 3. Term in Gl. 3.41) entspricht dem Fermion-Diagramm mit umgekehrter Impulsrichtung. Da dieses Diagramm lediglich einen Faktor zwei liefert, haben wir es hier nicht explizit gezeichnet, was wir auch in Zukunft mit allen Diagrammen dieser Art tun werden. Sie liefern immer lediglich einen Faktor zwei.

Als nächstes befassen wir uns mit der Flussgleichung für die skalare Wellenfunktionsrenormierung. Diese werden wir aus der Flussgleichung für die skalare Zwei-Punkt-Funktion isolieren. Leiten wir die Tadpole-Gleichung 3.38 ein weiteres Mal nach einem Skalarfeld ab, so erhalten wir<sup>4</sup>

$$\Lambda \partial_\Lambda \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \varphi_k} = \frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \mathcal{K}_\Lambda \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{K}_\Lambda \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} - \mathcal{K}_\Lambda \frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right\}. \quad (3.43)$$

Im Prinzip müssen wir in Bezug auf Flavour-Symmetrien nicht zweimal nach demselben Skalarfeld ableiten. Wählt man aber eine geeignete Basis für die Felder, sodass diese bereits den Masseneigenzuständen entsprechen, verschwinden alle nicht-diagonalen Terme. Das zeigt die explizite Rechnung. Lediglich die Zwei-Punkt-Funktion bei der zweimal nach demselben Skalarfeld abgeleitet wird, ist dann noch von Null verschieden. Wir können wiederum die Superspur ausführen, wollen aber diese Zwischenergebnisse nicht mehr als Formel angeben. Diagrammatisch lautet diese Gleichung:

$$\Lambda \partial_\Lambda \text{---} \text{blob} \text{---} = \text{---} \text{loop} \text{---} + \text{---} \text{loop} \text{---} \quad (3.44)$$

Man beachte, dass im Loop verschiedene Teilchen laufen können, das erste und zweite, sowie das dritte und vierte Diagramm sind deshalb nicht unbedingt identisch. Außerdem weisen wir darauf hin, dass die volle Zwei-Punkt-Funktion auf der linken Seite der Gleichung im Sinne unserer modifizierten effektiven Wirkung zu verstehen ist, folglich den nackten Propagator *nicht* enthält. Als nächstes leiten wir die Gleichungen für die fermionische Zwei-Punkt-Funktion ab. Wir werden daraus die Flussgleichung für die relevanten Fermionparameter gewinnen. Wir differenzieren

<sup>4</sup>Wir schreiben ab jetzt das auf den Vakuumzustand Setzen der Felder nicht mehr jedesmal an. Alle Gleichungen sind aber wie Gl. 3.38 im Vakuumzustand zu verstehen.

dazu unsere Master-Gleichung jeweils einmal nach  $\psi$  und  $\bar{\psi}$ . Um die Antivertauschungsrelationen von Grassmann-Variablen genau zu beachten müssen wir uns lediglich exakt an die Rechenregeln des Superspur-Formalismus, wie sie in Anhang B erläutert werden, halten. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi}_j \delta \psi_k} &= \frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi}_j \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \mathcal{K}_\Lambda \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right. \\ &\quad + \mathcal{K}_\Lambda \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi_j \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \\ &\quad \left. - \mathcal{K}_\Lambda \frac{\delta^4 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi}_j \delta \psi_k \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für die volle Zwei-Punkt-Funktion auf der linken Seite dieser Gleichung gilt wieder das bereits oben Gesagte. Wir geben ebenfalls das Ergebnis nach Ausführung der Superspur lediglich diagrammatisch an:

$$\Lambda \partial_\Lambda \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \quad (3.46)$$

Zuletzt benötigen wir noch eine Flussgleichung, aus der wir die Gleichung für die Yukawa-Kopplung isolieren können. Dazu leiten wir die Gleichung für die fermionische Zwei-Punkt-Funktion ein weiteres Mal nach einem Skalarfeld ab und erhalten die Flussgleichung für die gemischte Drei-Punkt-Funktion:





## 4. DER CHIRALE PHASENÜBERGANG IM RAHMEN DER THERMALEN RENORMIERUNGSGRUPPE

### 4.1. Das chirale Quark-Meson-Modell

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir jetzt zur Anwendung der thermalen Renormierungsgruppe auf ein konkretes Modell. Wir wollen in dieser Arbeit das sogenannte chirale Quark-Meson-Modell untersuchen. Zum einen, da es das nahezu einfachste Modell für ein System von gekoppelten Fermionen und Skalaren ist, an dem wir dieses Verfahren testen können, zum anderen, da es den chiralen Phasenübergang der Quantenchromodynamik (QCD) im Limes verschwindender Strom-Quark-Massen und explizit gebrochener axialer  $U(1)_A$  Symmetrie beschreibt. Wir wollen zunächst aber nicht versuchen dieses Modell tatsächlich auf die QCD anzuwenden. Um eine Verbindung zur QCD herzustellen, müssen die  $(T = 0)$ -Kopplungen entsprechend den QCD-Parametern gewählt werden. Damit begeben wir uns aber in einen Bereich starker Kopplungen, für die QCD gilt etwa  $h \sim \mathcal{O}(6)$ . Die Werte der Kopplungen der  $(T = 0)$ -Wirkung sind dann aber nicht mehr störungstheoretisch ohne weiteres zu bestimmen. Höherdimensionale Operatoren in der  $(T = 0)$ -Wirkung können dann durchaus groß werden. Die Start-Wirkung müsste z.B. durch eine zusätzliche ERG-Analyse bestimmt werden bzw. es wäre dann notwendig zu überprüfen, ob die Resultate sehr sensitiv auf solche höherdimensionalen Operatoren sind. Deshalb beschränken wir uns zunächst auf den Limes kleiner Kopplungen. In diesem Limes sind die Näherungen der Start-Wirkung zuverlässig, nicht-universelle Eigenschaften des Phasenübergangs können damit korrekt beschrieben werden.

Im letzten Abschnitt werden wir dann den Versuch unternehmen das Verfahren auf die QCD anzuwenden. Trotz der eben genannten Bedenken werden wir sehen, dass wir damit schon sehr gute Resultate erzielen können. Zusätzlich kommt uns für das Verhalten am Phasenübergang Universalität zu Hilfe. Da alle universellen Größen des Phasenübergangs unabhängig von den Kopplungen sind, können sie auch für den Fall starker Kopplungen in jedem Fall beschrieben werden. Die universellen Eigenschaften gelten somit für den gesamten Parameterraum. Wir werden in der ganzen Abhandlung immer die übliche Terminologie der starken Wechselwirkung verwenden, da sie dem Leser vertraut sein sollte.

Dass das chirale Quark-Meson-Modell quantitativ auf die QCD angewendet werden kann, wurde zuerst von Georgi et. al. [73] vorgeschlagen. Quantitativ untersucht wurde dieser Zusammenhang dann von Ellwanger und Wetterich [74]. In der Folge haben Berges, Jungnickel und Wetterich [75,76] intensiv davon Gebrauch gemacht, indem sie dieses Modell im Rahmen der exakten Renormierungsgruppe untersucht haben. Es besteht mittlerweile weitestgehend Einigkeit, dass der chirale Phasenübergang in die Hochtemperaturphase im Zwei-Flavour-Fall von zweiter Ord-

nung ist und das universelle Verhalten dem des  $O(4)$ -Modells entspricht<sup>1</sup>. Das zeigen Universalitäts-Argumente sowie die dimensionale Reduktion [78–80]: Fermionen besitzen keine masselosen Null-Moden im Matsubara-Formalismus und haben deshalb keinen dreidimensionalen klassischen Limes. Der Phasenübergang wird aber rein durch diesen dreidimensionalen klassischen Limes dominiert, sodass die Fermionen auf das kritische Verhalten keinen Einfluss haben können. Allerdings kann die Größe der Region, in der universelles Verhalten auftritt, stark unterdrückt sein [81–83]. Erste Hinweise in diese Richtung kommen ebenso von Gitter-Simulationen, sowohl mit “Staggered”- [84, 85] als auch mit “Wilson”-Fermionen [86].

Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie bei ( $T = 0$ ) erfolgt nach dem Schema

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_V \longrightarrow SU(2)_V \otimes U(1)_V \quad (4.1)$$

durch den Vakuumerwartungswert des Mesonfeldes. Die ungebrochene Untergruppe  $SU(2)_V$  beschreibt den starken Isospin, die vektorielle  $U(1)_V$  die Baryonenzahl. Das Modell enthält ein skalares Bidublett der Symmetriegruppe. Dieses lässt sich als Summe eines skalaren Singulett, des sog. Sigma-Teilchens  $\sigma$ , sowie eines pseudoskalaren Isotripletts, der Pionen  $\vec{\pi}$ , angeben. Das sind Masseneigenzustände in der chiral gebrochenen Phase. In der symmetrischen Phase hingegen wird das Mesonfeld durch einen Vektor bzgl. der  $O(4)$ -Symmetrie beschrieben. Neben diesem dem linearen Sigma-Modell entsprechenden Mesonfeld enthält das chirale Quark-Meson-Modell noch zusätzlich ein Fermiondublett  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ , das durch eine Yukawa-Kopplung an das Mesonfeld gekoppelt ist. Die Lagrangedichte des Systems lautet somit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + Z \text{Tr} \left[ \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi \right] - U(\phi^\dagger, \phi) - h \bar{\psi} \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \phi + \frac{1 - \gamma_5}{2} \phi^\dagger \right) \psi . \quad (4.2)$$

Diese Lagrangedichte besitzt im Prinzip eine zusätzliche axiale  $U(1)_A$  Symmetrie, das Sigma-Teilchen und die Pionen hätten dann noch axiale Partner: das pseudoskalare Singulett  $\eta$  und das skalare Isotriplett  $\vec{a}$ <sup>2</sup>

$$\phi = \frac{1}{2}(\sigma - i\eta)\mathbb{1} + \frac{1}{2}(a^j + i\pi^j)\tau_j . \quad (4.3)$$

Wir wählen das skalare Potenzial so, dass diese Symmetrie explizit gebrochen ist und die axialen Partner unendlich schwer werden, also komplett von der Niederenergiephysik entkoppeln. Ein Potenzial der Form

$$-\mu^2 \rho - \frac{1}{2} \nu \xi = \frac{1}{2} \left( -\mu^2 - \frac{1}{2} \nu \right) (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{1}{2} \left( -\mu^2 + \frac{1}{2} \nu \right) (\eta^2 + \vec{a}^2) \quad (4.4)$$

kann so gewählt werden, dass es diese Forderung erfüllt. Dabei haben wir die Invarianten der vollen Symmetrie

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Tr} [\phi^\dagger \phi] = \frac{1}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{1}{2} (\eta^2 + \vec{a}^2) \\ \xi &= \det(\phi) + \det(\phi^\dagger) = \frac{1}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{1}{2} (\eta^2 + \vec{a}^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Wir betrachten nur den Fall der Symmetrierestauration aufgrund der Temperatur. Bei sehr hohen Teilchendichten, also bei Vorhandensein eines chemischen Potentials, kommt es ebenfalls zur Restauration der chiralen Symmetrie. Diesen Teil des Phasendiagramms lassen wir zunächst ununtersucht. Für erste Berechnungen mit chemischem Potenzial im Rahmen der exakten Renormierungsgruppe siehe [77].

<sup>2</sup> $\tau_j$  bezeichnen die Pauli-Matrizen.

benutzt. Nach der Brechung der axialen  $U(1)_A$  Symmetrie bleibt einzig  $\rho$  als Invariante, das effektive Potenzial ist also lediglich eine Funktion dieser einen Variablen

$$U(\phi^\dagger, \phi) = U(\rho) \quad (4.6)$$

und das Mesonfeld besitzt im Niederenergielimes nur noch die Freiheitsgrade

$$\varphi = \frac{1}{2}(\sigma \mathbb{1} + i\vec{\pi}\vec{\tau}) . \quad (4.7)$$

Bei ( $T = 0$ ) wird die chirale Symmetrie in der durch Gl. 4.1 beschriebenen Weise durch den Vakuumerwartungswert des Mesonfeldes

$$\langle \Phi \rangle = \sigma_0 \mathbb{1} \quad (4.8)$$

gebrochen.

Als nächstes stellt sich die Frage nach der Start-Wirkung. Wie bereits diskutiert, ist die Randbedingung an die Mittelwert-Wirkung die effektive ( $T = 0$ )-Wirkung. Des Weiteren haben wir dargelegt, dass wir uns auf den Fall schwacher Kopplungen beschränken werden. Die effektive Start-Wirkung sollte sich dann perturbativ aus der klassischen Wirkung berechnen lassen. Wir wollen aber sogar in der Störungstheorie nur die niedrigste Ordnung – als nur das Tree-Niveau – wählen. Die effektive ( $T = 0$ )-Wirkung stimmt dann mit der klassischen Wirkung überein. Wir wollen ein System mit spontan gebrochener Symmetrie betrachten, wählen also die Parameter der Start-Wirkung entsprechend. Zusätzlich zum effektiven Potenzial enthält die Start-Wirkung eine Yukawa-Kopplung des Fermion-Dubletts an das Mesonfeld<sup>3</sup>

$$\bar{\Gamma}_{\Lambda \rightarrow \infty} = \int d^4x \left[ -\frac{g(T=0)}{2} \rho^2 - h_{(T=0)} \bar{\psi} \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \varphi + \frac{1 - \gamma_5}{2} \varphi^\dagger \right) \psi \right] . \quad (4.9)$$

Eine Verbesserung durch Terme höherer Ordnung in der Störungstheorie für die Start-Wirkung ist im Prinzip möglich, für das universelle Verhalten aber, wie bereits erläutert, unnötig. Wir beschränken uns auf den Fall kleiner Kopplungen für die Berechnung nicht-universeller Größen, der Fehler in diesen sollte deshalb gering sein.

Nun wollen wir die vorher allgemein beschriebenen Näherungen, die wir vornehmen werden, im Detail beschreiben. Wir erläutern zuerst die Näherungen im rein skalaren Sektor der Mittelwert-Wirkung.

Das effektive Potenzial, also den ersten rein skalaren Term der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung, werden wir *ohne* weitere sogenannte *lokale polynomiale Approximation* belassen. Diese Näherung wird oft gemacht, da sie die Rechenzeit drastisch reduziert. Für viele Größen ist sie auch ausreichend, die auf diese Weise berechneten kritischen Exponenten sind aber mit sehr großen Fehlern behaftet. Das zeigt z.B. der Vergleich der Arbeiten von Bergerhoff [88] und D'Attanasio und Pietroni [71]. Darüber hinaus gehen wir bis zur ersten Ordnung in der Ableitungsentwicklung, berücksichtigen also auch noch die Wellenfunktionsrenormierung

---

<sup>3</sup>Man beachte, dass in unserer modifizierten Definition der effektiven Wirkung die klassischen kinetischen Terme nicht enthalten sind.

für das Skalarfeld. Diese ist grundsätzlich eine Funktion des Feldes, wir beschränken uns aber auf eine Konstante, die zugehörige Flussgleichung werten wir am Minimum des effektiven Potentials aus. Da wir Vorgänge in einem Wärmebad betrachten, können die Wellenfunktionsrenormierungen der Zeit- und der Raumkomponenten des Impulses unterschiedlich sein. Das kann man durch einen zusätzlichen Term proportional zum Wärmebadvektor  $u$  berücksichtigen. Diese Unterscheidung wollen wir aber nicht vornehmen und nur eine Wellenfunktionsrenormierung betrachten. Die dreidimensionale Physik wird durch diese Näherung aber nicht beeinflusst.

Im gemischten Sektor der Mittelwert-Wirkung, der Skalare und Fermionen enthält, bleiben wir in der niedrigsten Ordnung der Ableitungsentwicklung und in der niedrigsten Ordnung einer lokalen polynomialen Approximation. D.h. wir lassen nur die in der Start-Wirkung schon vorhandene Yukawa-Kopplung zu. Lediglich der Wert der Kopplungskonstanten wird selbstverständlich skalenabhängig. Der nächste Term der Ableitungsentwicklung für Fermionen ist ungeeignet die Eigenschaften der Fermionen am Phasenübergang korrekt zu beschreiben. Wir werden das im nächsten Abschnitt, wenn wir die vollen Propagatoren besprechen, darlegen und einen geeigneten Term jenseits der Ableitungsentwicklung einführen. Die Mittelwert-Wirkung im Rahmen dieser Ableitungsentwicklung lautet damit:

$$\bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi] = \int d^4x \left[ (Z_\Lambda - 1) \text{Tr} \left[ \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi \right] - U_\Lambda(\rho) + m^2 \rho - h_\Lambda \bar{\psi} \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \varphi + \frac{1 - \gamma_5}{2} \varphi^\dagger \right) \psi \right] \quad (4.10)$$

Für den skalaren vollen Propagator machen wir folgenden mit dieser Mittelwert-Wirkung verträglichen Ansatz. Wir nehmen eine Schwinger-Dyson-Gleichung

$$\Delta_\Lambda^b(k) = \Delta_0^b(k) \prod_{n=0}^{\infty} (-\Pi_\Lambda(k, \varphi) \Delta_0^b(k))^n = \frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_\Lambda(k, \varphi) + i\epsilon} \quad (4.11)$$

für den Propagator an. Der volle Propagator

$$D_\Lambda(k) = \left[ D_0^{-1}(k) + \Sigma_\Lambda(k, \varphi) \right]^{-1} \quad (4.12)$$

mit der Selbstenergie-Matrix

$$(2\pi)^4 \delta(-k' + k) \Sigma_{\Lambda,ij}(k) = \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_i(-k') \delta \varphi_j(k)} \quad (4.13)$$

behält dann seine Struktur aus Gl. 3.20 bei. Lediglich die Funktion  $\Delta_0^b(k)$  wird durch  $\Delta_\Lambda^b(k)$  ersetzt. Zwischen der Selbstenergie-Matrix und der Selbstenergie bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Re(\Pi_\Lambda(k, \varphi)) &= \Re(\Sigma_{\Lambda,11}(k, \varphi)) \\ \Im(\Pi_\Lambda(k, \varphi)) &= \frac{\Im(\Sigma_{\Lambda,11}(k, \varphi))}{1 + 2N_{\text{BE}}(|k_0|)\theta(|\vec{k}| - \Lambda)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wir vernachlässigen zusätzlich die Imaginärteile der Selbstenergie. Diese sind allerdings von besonderem Interesse, da sie die Plasmon-Dämpfungsraten bestimmen. Im Rahmen der sogenannten Quasiteilchen-Näherung können sie aber trotzdem bestimmt werden. In dieser Näherung

werden die Imaginärteile nicht wieder selbstkonsistent berücksichtigt. Für das Laufen des Potentials sollte das Vernachlässigen der Imaginärteile keine allzu großen Fehler produzieren, da sie das Laufen des Potentials nur indirekt durch die anomale Dimension beeinflussen, diese aber, wie wir sehen werden, sehr klein ist. Die angenommene Schwinger-Dyson-Gleichung lässt sich in dieser Approximation exakt zeigen. In der diskutierten Ordnung der Ableitungsentwicklung wird der skalare Propagator damit zu

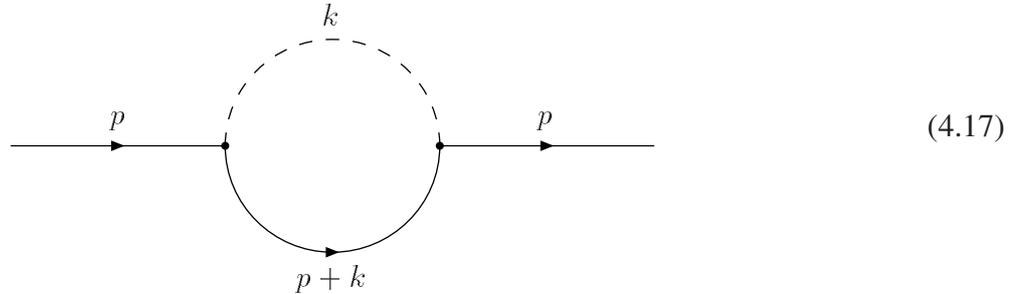
$$\Delta_{\Lambda}^b(k^2) = \frac{1}{Z_{\Lambda}k^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (4.15)$$

Dabei steht  $M^2$  für die Eigenwerte der Massenmatrix  $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varphi}$ . Diese lauten in unserem Modell

$$M_{\sigma}^2 = U'(\rho) + 2\rho U''(\rho) \quad \text{und} \quad M_{\pi}^2 = U'(\rho). \quad (4.16)$$

Bis auf die Erweiterung auf die erste Ordnung in der Ableitungsentwicklung wurde diese Näherung für den vollen skalaren Propagator schon von D'Attanasio und Pietroni [71] vorgeschlagen. Die Näherungen für den vollen Fermion-Propagator sind hingegen komplizierter. Die führenden thermalen Effekte stellen, anders als im skalaren Fall, keine lediglich lokale Kopplung dar, sondern äußern sich vielmehr in einer nicht-lokalen Struktur der Zwei-Punkt-Funktion [29]. Wir wollen dies zunächst in Ein-Loop-Störungstheorie unabhängig von der TRG diskutieren.

Die thermalen Effekte zum Fermion-Propagator lassen sich in der sogenannten *Hard Thermal Loop Approximation* (HTL-Approximation) in Ein-Loop Näherung berechnen. Das zu berechnende Diagramm lautet:



Wenden wir die HTL-Approximation auf dieses Integral an, d.h. vernachlässigen wir sowohl die Impulse der äußeren Felder als auch die Massen der Teilchen im Loop gegenüber dem Loop-Impuls, erhalten wir einen Fermion-Propagator, der wiederum seine Matrix-Struktur (Gl. 2.38) beibehält, aber mit der veränderten Funktion (mit  $m_{\psi} = 0$ ):

$$\Delta_{\Lambda}^f(p) = [(1 + a(p_0, P))\not{p} + b(p_0, P)\not{\psi}]^{-1}$$

$$a(p_0, P) = \frac{m_T^2}{P^2} \left[ 1 - \frac{p_0}{2P} \ln \left( \frac{p_0 + P}{p_0 - P} \right) \right]$$

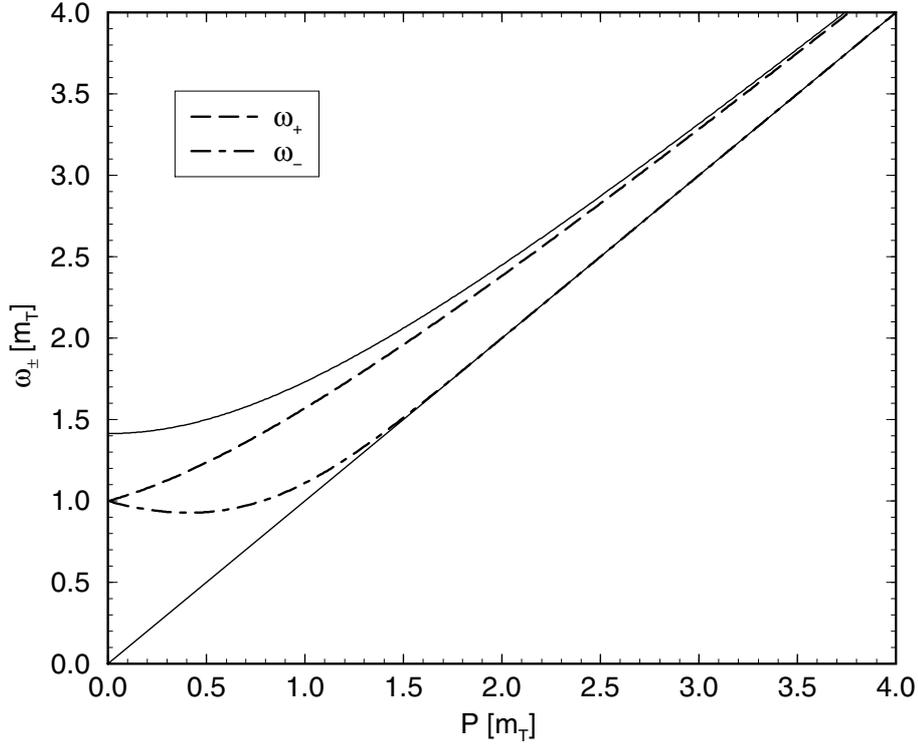


Abbildung 4.1: Dispersionsrelationen der fermionischen Freiheitsgrade in Ein-Loop HTL-Approximation. Die durchgezogenen Linien geben im Vergleich dazu die Dispersionsrelationen eines masselosen und eines massiven Teilchens mit der Masse  $\sqrt{2m_T^2}$  wieder.

$$b(p_0, P) = \frac{m_T^2}{P} \left[ -\frac{p_0}{P} + \frac{1}{2} \left( \frac{p_0^2}{P^2} - 1 \right) \ln \left( \frac{p_0 + P}{p_0 - P} \right) \right]$$

$$P = \sqrt{\vec{p}^2} \quad (4.18)$$

Dabei taucht der Wärmebadvektor auf, der ohne Beschränkung der Allgemeinheit als  $u = (1, 0, 0, 0)$  angenommen werden kann. Diese nicht-lokale Struktur resultiert in einer komplizierten Dispersionsrelation der kollektiven Fermion-Moden, welche sich als Lösungen der Gleichung

$$D(\omega) = [1 + a(\omega, P)]^2 (\omega^2 - P^2) + 2[1 + a(\omega, P)]b(\omega, P)\omega + b(\omega, P)^2 = 0 \quad (4.19)$$

ergeben. Diese Gleichung ist nicht analytisch lösbar, die numerischen Lösungen sind in Abb. 4.1 dargestellt. Die Größe  $m_T$  hat die Dimension einer Masse und ist gegeben als

$$m_T^2 = \frac{h^2}{16} T^2. \quad (4.20)$$

Die beiden Fermion-Moden unterscheiden sich durch ihren Eigenwert bzgl. der Größe  $\chi$ . Diese definieren wir als das Verhältnis von Helizität über Chiralität. Neben der auch bei ( $T = 0$ ) vorhandenen Fermion-Anregung  $\omega_+$  mit dem Eigenwert  $\chi = +1$  erhält man zusätzlich eine Anregung

$\omega_-$  mit negativem Eigenwert  $\chi = -1$ . Diese Anregung wird im Allgemeinen als Plasmino bezeichnet. Die Residuen dieser Quasiteilchen-Anregungen sind gegeben durch

$$Z_{\pm}(P) = \frac{\omega_{\pm}^2 - P^2}{2m_T^2}. \quad (4.21)$$

Das Residuum eines Teilchen-Pols gibt das Amplitudenverhältnis dieses Quasiteilchens in einer Störung des Plasmas wieder.

Die Dispersionsrelationen lassen sich in den Grenzfällen kleiner und großer Impulse näherungsweise angeben. Bei kleinen Impulsen verhalten sich die Dispersionsrelationen der Moden wie die massiver Teilchen mit der Masse  $m_T$ . Deshalb bezeichnet man diese Größe als thermale Masse. Die Lösungen der Gl. 4.19 und die Residuen dieser Quasiteilchen-Pole können in diesem Fall durch

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(P) &\approx m_T \pm \frac{P}{3} \\ Z_{\pm}(P) &\approx \frac{1}{2} \pm \frac{P}{3M_T} \end{aligned} \quad (P \ll m_T) \quad (4.22)$$

angegeben werden. Bei hohen Impulsen hingegen ist die Dispersionsrelation des Plasminos die eines masselosen Teilchens, wird aber exponentiell unterdrückt, da sein Residuum exponentiell gegen Null geht.

$$\begin{aligned} \omega_-(P) &\approx P + \frac{\sqrt{8}P}{h} \exp\left(-\frac{2P^2}{m_T^2}\right) \\ Z_-(P) &\approx \frac{\sqrt{8}P^2}{hm_T^2} \exp\left(-\frac{2P^2}{m_T^2}\right) \end{aligned} \quad (P \gg m_T). \quad (4.23)$$

Die Dispersionsrelation des Fermions hingegen sowie dessen Residuum verhalten sich bei hohen Impulsen wie

$$\begin{aligned} \omega_+(P) &\approx P + \frac{m_T^2}{P} \\ Z_+(P) &\approx 1 + \frac{m_T^2}{2P^2} \left(1 - \ln\left[\frac{2P^2}{m_T^2}\right]\right) \end{aligned} \quad (P \gg m_T), \quad (4.24)$$

was einem Teilchen der Masse  $\sqrt{2m_T^2}$  entspricht. Wir können diese Eigenschaften wie folgt zusammenfassen:

- Neben dem Fermionfreiheitsgrad, der auch bei ( $T = 0$ ) existiert, gibt es noch eine zweite Mode mit entgegengesetztem Eigenwert  $\chi = -1$ . Diese wird im Allgemeinen als Plasmino bezeichnet. Diese fermionischen Quasiteilchenmoden verhalten sich bei kleinen Impulsen wie die massiver Teilchen. Die chirale Symmetrie wird durch die thermale Masse allerdings *nicht* gebrochen! Das ist ganz analog zur Plasma-Masse des Photons, diese verletzt ebenfalls nicht die elektromagnetische Eichinvarianz.

- Bei hohen Impulsen hingegen wird das Plasmino exponentiell unterdrückt und entkoppelt vollständig vom physikalischen Spektrum. Das Fermion hingegen verhält sich wie ein massives Teilchen mit der Masse  $\sqrt{2m_T^2}$ . Die chirale Symmetrie bleibt auch hier weiterhin erhalten!

Der führende Effekt dieser nicht-lokalen Struktur kann zumindest näherungsweise durch einen lokalen Massenterm berücksichtigt werden [87]. Bei diesem Ansatz ist darauf zu achten, dass dieser lokale Massenterm die chirale Symmetrie respektiert, wie es die tatsächlichen Dispersionsrelationen tun. Wir müssen zusätzlich berücksichtigen, dass das Fermion in unserem Modell durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie noch einen chiral nicht-invarianten Massenterm erhält, der durch die Yukawa-Kopplung mit dem skalaren Vakuumerwartungswert verknüpft ist. Insgesamt liefern diese Überlegungen den Ansatz:

$$\begin{aligned} \Delta^f(p) &= \frac{(1 + a(p_0, P))\not{p} + b(p_0, P)\not{p} + m_\chi}{(1 + a(p_0, P))^2 p^2 + 2(1 + a(p_0, P))b(p_0, P)p_0 + b(p_0, P)^2 - m_\chi^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{\not{p} + m_\chi + O(m_T^2/P)}{p^2 - (m_\chi^2 + 2m_T^2) + O(m_T^4/P^2) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Man beachte, dass die thermale Masse nur im Nenner des Propagators steht und somit die chirale Invarianz auch nicht durch die thermale Masse gebrochen wird. Das ist der Ansatz für den vollen Fermion-Propagator, den wir in dieser Arbeit verwenden werden.

Hätten wir für die Fermionen das gleiche Verfahren angewendet wie für die Skalare, also nur Terme im Sinn einer reinen Ableitungsentwicklung betrachtet, hätten wir nie eine solche nicht-lokale Struktur gefunden. Dies wurde auch in bisherigen Arbeiten, die mit wilsonscher Renormierungsgruppe das chirale Quark-Meson-Modell untersucht haben, nicht berücksichtigt. Allerdings führt das in der thermalen Renormierungsgruppe zu weit gewichtigeren Problemen als in der exakten Renormierungsgruppe. In der TRG-Formulierung hängt die Entkopplung der Fermionmoden am Phasenübergang in der dreidimensionalen Theorie essentiell an der thermalen Masse. Wir werden das später noch in Abschnitt 4.4 ausführlich diskutieren. Wir werden dabei auch die Güte der Näherung 4.25 untersuchen.

Wir wollen hier nur schon einmal auf zwei numerische Ergebnisse vorgreifen. In Abb. 4.2 ist das numerische Ergebnis für die thermale Fermionmasse, in Abb. 4.3 das der thermalen Yukawa-Kopplung aufgetragen. Zum Vergleich haben wir zur thermalen Masse das perturbative Resultat aufgetragen, zur Yukawa-Kopplung die  $(T = 0)$ -Yukawa-Kopplung. Man erkennt, dass die thermale Masse annähernd durch die Störungstheorie beschrieben wird, im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  koinzidieren die beiden Resultate wie es zu erwarten war. Die thermale Yukawa-Kopplung entspricht annähernd der  $(T = 0)$ -Kopplung, erhält aber doch nicht zu vernachlässigende thermale Korrekturen. Diese Korrekturen werden im Rahmen dieser Approximation durch die thermale Renormierungsgruppe aber vollständig resummiert und gehen damit über das reine Ein-Loop Resultat hinaus, welches wir hier diskutiert haben.

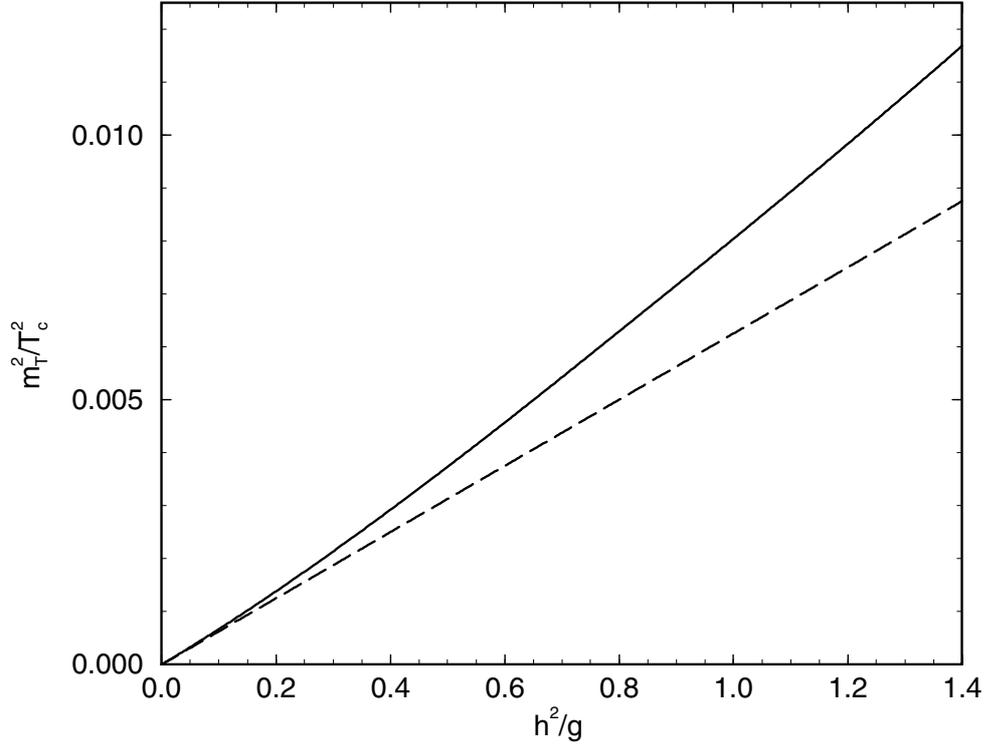


Abbildung 4.2: Die dimensionslose thermale Fermion-Masse bei der kritischen Temperatur  $T_c$  als Funktion des Verhältnisses der  $(T = 0)$ -Kopplungen  $\frac{h^2}{g}$  bei festem  $g = 0.1$ . Die gestrichelte Linie stellt das perturbative Ergebnis aus Gl. 4.20 dar.

## 4.2. Die Flussgleichungen für das chirale Quark-Meson-Modell

Mit diesen Näherungen sind wir nun in der Lage ein System von Flussgleichungen für die einzelnen Terme der Ableitungsentwicklung zu berechnen, das sich numerisch lösen lässt. Eine Größe, die in allen Flussgleichungen auftaucht, ist der Kern Gl. 3.39. Mit den vorher diskutierten Näherungen für die vollen Propagatoren nimmt der skalare sowie der fermionische Kern die Form

$$\begin{aligned}
 K_{\Lambda}^b &= \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) \frac{\Delta_{\Lambda}^b (\Delta_{\Lambda}^b)^*}{\Delta_0^b (\Delta_0^b)^*} (\Delta_0^b - (\Delta_0^b)^*) N_{\text{BE}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -2\pi i \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{BE}}(|k_0|) \delta(Z_{\Lambda} k^2 - M^2) \theta(Z_{\Lambda} \vec{k}^2 + M^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\Lambda}^f &= -\Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) \frac{\Delta_{\Lambda}^f (\Delta_{\Lambda}^f)^*}{\Delta_0^f (\Delta_0^f)^*} (\Delta_0^f - (\Delta_0^f)^*) N_{\text{FD}}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= 2\pi i (\not{k} + m_{\chi}) \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{FD}}(|k_0|) \delta(k^2 - (m_{\chi} + 2m_T^2)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

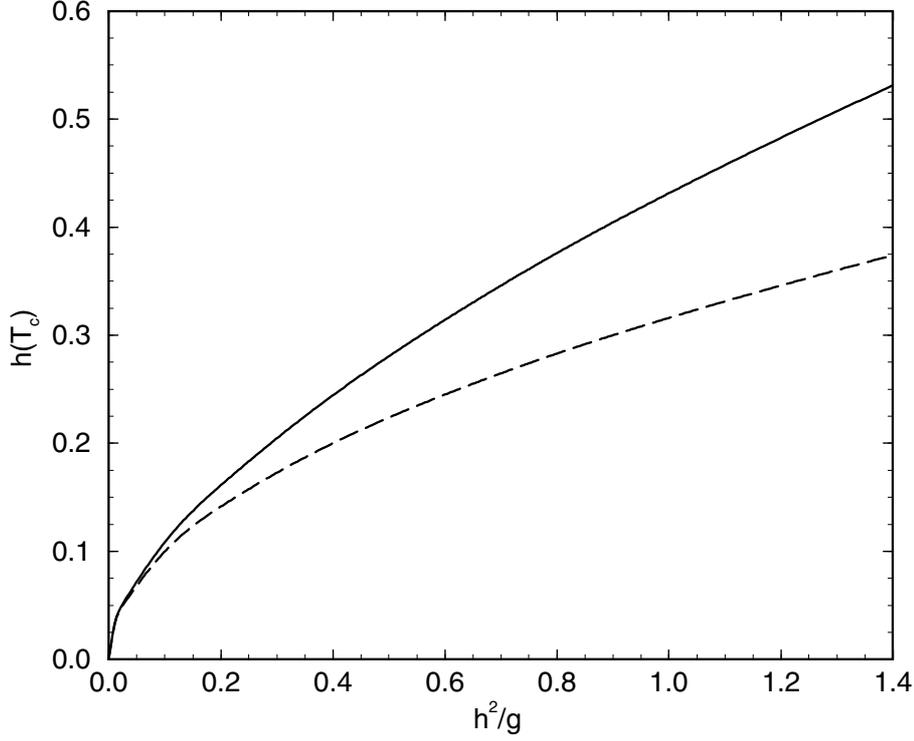


Abbildung 4.3: Die unrenormierte Yukawa-Kopplung bei der kritischen Temperatur  $T_c$  als Funktion des Verhältnisses der  $(T = 0)$ -Kopplungen  $\frac{h^2}{g}$  bei festem  $g = 0.1$ . Die gestrichelte Linie stellt den  $(T = 0)$ -Startwert dar.

an. Dabei haben wir die Beziehung

$$-2\pi i \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon} \right] \quad (4.28)$$

benützt [31]. Mit dieser Form der Kerne können wir nun zeigen, dass wir uns auf das Funktional  $\bar{\Gamma}_\Lambda$  nur eines Feldes  $\Phi$  beschränken können, das wir in Gl. 3.37 definiert haben. Wir setzen dazu die Kerne in die Tadpole-Gleichung 3.41 ein (zur Erinnerung:  $j, k, l$  bezeichnen die thermalen Indizes der Felder.):

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j} &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \left[ K_\Lambda^b \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \varphi \delta \varphi} + K_\Lambda^f \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \psi \delta \psi} - (K_\Lambda^f)^T \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \psi \delta \bar{\psi}} \right] \\ &= -\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{BE}}(|k_0|) \delta(Z_\Lambda k^2 - M^2) \theta(Z_\Lambda \vec{k}^2 + M^2) \sum_{k,l} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \varphi_k \delta \varphi_l} \\ &\quad + 2\pi \text{Tr}_{\text{Dirac}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k + m_\chi) \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{FD}}(|k_0|) \delta(k^2 - (m_\chi + 2m_T^2)) \sum_{k,l} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_j \delta \bar{\psi}_k \delta \psi_l} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Jetzt wählen wir als äußeres Feld das Eins-Feld  $\varphi_1$ . Um die Drei-Punkt-Funktionen auf der rechten Seite durch Drei-Punkt-Funktionen in  $\bar{\Gamma}_\Lambda$  ausdrücken zu können, leiten wir die Definitionsgleichung für  $\bar{\Gamma}_\Lambda$

$$\left. \frac{\delta \bar{\Gamma}[\Phi]}{\delta \Phi} \right|_{\Phi = \text{const.}} = \left. \frac{\delta \Gamma[\Phi_1, \Phi_2]}{\delta \Phi_1} \right|_{\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi = \text{const.}} \quad (4.30)$$

noch zweimal nach  $\Phi$  ab. Auf der rechten Seite müssen wir dabei die Kettenregel beachten und erhalten damit

$$\frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \Phi \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} = \sum_{i,j=1,2} \left. \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi_i \delta \bar{\Phi}_j \delta \Phi_1} \right|_{\Phi_2 = \Phi_1 = \Phi} \quad (4.31)$$

Aufgelöst nach den einzelnen Feldern erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi \delta \varphi} &= \sum_{k,l=1,2} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_k \delta \varphi_l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi \\ \psi_1 = \psi_2 = \psi \\ \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \bar{\psi} \end{array} \right\} \\ \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \varphi \delta \bar{\psi} \delta \psi} &= \sum_{k,l=1,2} \frac{\delta^3 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi_1 \delta \bar{\psi}_k \delta \psi_l} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi \\ \psi_1 = \psi_2 = \psi \\ \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \bar{\psi} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Diese Beziehungen entsprechen aber genau den Summen in der Tadpole-Gleichung 4.29. Wir können somit in der Tadpole-Gleichung das Funktional ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \frac{\delta \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \varphi} &= -\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{BE}}(|k_0|) \delta(Z_\Lambda k^2 - M^2) \theta(Z_\Lambda \vec{k}^2 + M^2) \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi \delta \varphi} \\ &+ 2\pi \text{Tr}_{\text{Dirac}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\not{k} + m_\chi) \Lambda \delta(|\vec{k}| - \Lambda) N_{\text{FD}}(|k_0|) \delta(k^2 - (m_\chi + 2m_T^2)) \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \varphi \delta \bar{\psi} \delta \psi} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Damit haben wir die thermalen Indizes in der Tadpole-Gleichung erfolgreich eliminiert. Als nächstes müssen wir uns um die Flavour-Struktur kümmern. Das chirale Quark-Meson-Modell enthält in der diskutierten Trunkierung (siehe Gl. 4.10) folgende Drei-Punkt-Vertizes (die Indizes bezeichnen im folgenden Flavour-Zustände):

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \sigma \delta \sigma \delta \sigma} &= [U^{(3)}(\rho) \sigma^3 + 3U^{(2)}(\rho) \sigma] \int d^4 x, \quad \frac{\delta^3 U(\rho)}{\delta \sigma \delta \pi_\epsilon \delta \pi_\lambda} = U^{(2)}(\rho) \sigma \delta_{\epsilon\lambda} \int d^4 x \\ \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \sigma \delta \bar{\psi}_\epsilon \delta \psi_\lambda} &= \frac{h}{2} \delta_{\epsilon\lambda} \int d^4 x, \quad \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \pi_\gamma \delta \bar{\psi}_\epsilon \delta \psi_\lambda} = \frac{h}{2} i \gamma_5 \tau_{\epsilon\lambda}^\gamma \int d^4 x \end{aligned} \quad (4.34)$$

Da wir uns auf statische Feldkonfigurationen beschränkt haben, liefert lediglich die Ableitung nach dem Potenzial auf der linken Seite der Tadpole-Gleichung einen Beitrag. Auf der rechten Seite können wir die Vertizes einsetzen und die Integrale auswerten. Daraus erhalten wir die

Flussgleichung für die erste Ableitung des effektiven Potentials. Eine Integration nach dem Feld liefert uns dann die Flussgleichung für das effektive Potential

$$\Lambda \partial_\Lambda U = -\frac{\Lambda^3 T}{2\pi^2} \left[ \ln[1 - \exp(-\beta\omega_b^\sigma)] \theta(\omega_b^{\sigma^2}) + 3 \ln[1 - \exp(-\beta\omega_b^\pi)] \theta(\omega_b^{\pi^2}) - 8N_c \ln[1 + \exp(-\beta\omega_f)] \right] \quad (4.35)$$

mit

$$\omega_b^\sigma = \sqrt{\frac{Z_\Lambda \Lambda^2 + U'(\rho) + 2\rho U''(\rho)}{Z_\Lambda}}, \quad \omega_b^\pi = \sqrt{\frac{Z_\Lambda \Lambda^2 + U'(\rho)}{Z_\Lambda}}, \quad \omega_f = \sqrt{\Lambda^2 + (m_\chi^2 + 2m_T^2)}. \quad (4.36)$$

Durch die Integration ist die Flussgleichung für das Potential nur bis auf eine temperaturabhängige Konstante bestimmt. Das ist unter anderem der Preis für die Eliminierung der thermalen Indizes. Aufgrund der Definition des Funktionals  $\bar{\Gamma}_\Lambda$  durch die Tadpole-Gleichung konnten wir letztlich nur eine Flussgleichung für die Ableitung des Potentials gewinnen. Auf der anderen Seite verliert man jedoch nichts dabei, da wir im Realzeit-Formalismus den Absolutwert der freien Energie sowieso nicht direkt bestimmen können (vgl. Kapitel 2). Teile dieser Flussgleichung wurden bereits in der Literatur angegeben. Dabei wurden aber bisher keine skalare Wellenfunktionsrenormierung und keine Fermionen berücksichtigt. Der Sigma-Beitrag zu dieser Flussgleichung wurde in Ref. [71], der Beitrag der Goldstone-Moden in Ref. [89] berechnet und numerisch untersucht.

Bevor wir uns an die Untersuchung dieser Flussgleichung machen, müssen wir zuerst noch die Flussgleichungen der anderen Größen bestimmen. Wie wir in Gl. 4.35 sehen können, sind das die Yukawa-Kopplung, die die chirale brechende Fermionmasse bestimmt, die thermale Fermionmasse und die skalare Wellenfunktionsrenormierung.

Wir beginnen mit der Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung. Wir beschränken uns auf eine impuls- und feldunabhängige Yukawa-Kopplung. D.h. wir werten die Flussgleichung bei Feld- und Impulswert Null aus. Die Flussgleichung für diese Kopplung erhalten wir, indem wir den Ansatz für die effektive Mittelwert-Wirkung Gl. 4.10 in die Flussgleichung für die Drei-Punkt-Funktion Gl. 3.47 einsetzen. Die angegebene Trunkierung der effektiven Mittelwert-Wirkung enthält keine gemischten Vier- und Fünf-Punkt-Kopplungen, d.h. die Gleichung 3.48 reduziert sich auf die ersten beiden Diagramme mit den entsprechenden Permutationen. Wir wählen dann als äußeres Feld das Pion.

Der Grund, warum wir die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung so auswerten, ist wie folgt: Die Yukawa-Kopplung ist im Prinzip ebenfalls eine Funktion des Feldes, hängt also von  $\rho$  ab. In erster Ordnung können wir schreiben

$$h(\rho) = h(\rho_0) + h'(\rho_0)(\rho - \rho_0) + \dots \quad (4.37)$$

Wir erhalten also, wenn wir als äußeres Feld das Sigma bzw. das Pion wählen, schematisch folgende Ausdrücke auf der linken Seite der Flussgleichung für die gemischte Drei-Punkt-Funktion

3.47:

$$\begin{aligned}\Lambda\partial_\Lambda\frac{\delta^3\bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta\sigma\delta\bar{\psi}\delta\psi} &\sim \Lambda\partial_\Lambda(h(\rho_0) + 2\rho h'(\rho_0)) \\ \Lambda\partial_\Lambda\frac{\delta^3\bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta\pi\delta\bar{\psi}\delta\psi} &\sim \Lambda\partial_\Lambda(h(\rho_0))\end{aligned}\quad (4.38)$$

D.h. die Flussgleichung für die Drei-Punkt-Funktion mit dem Sigma als äußerem Feld ist eine Flussgleichung für den nullten und den ersten Term der Entwicklung von  $h(\rho)$ , während die Flussgleichung für die Drei-Punkt-Funktion mit dem Pion als äußerem Feld nur eine Gleichung für den nullten Term darstellt. Nun beschränken wir uns aber zum einen auch in der gebrochenen Phase auf eine Kopplung, die sowohl die Kopplung der Fermionen an das Sigma als auch an die Pionen beschreibt, und zum anderen auf eine feldunabhängige Yukawa-Kopplung, also auf den nullten Term der Entwicklung der Yukawa-Kopplung nach dem Feld. Erstens erscheint damit die Gleichung für die Drei-Punkt-Funktion des Pions als zweckmäßiger, da sie tatsächlich die Evolutionsgleichung des Terms nullter Ordnung darstellt. Zweitens stimmen die Flussgleichungen für die Yukawa-Kopplungen überein, wenn wir sie bei dem Feldwert Null auswerten (siehe Anhang B). Insgesamt ist unsere Vorgehensweise im Rahmen der gemachten Trunkierungen damit in sich konsistent. Es bleibt zu bemerken, dass in den Arbeiten von Berges, Jungnickel und Wetterich [75–77] ebenfalls eine konstante Yukawa-Kopplung definiert wurde, die mit dem Pion als äußerem Feld berechnet wurde. Im Matsubara-Formalismus existieren die Felder allerdings nur bei diskreten Energien. Die Fermionen besitzen zudem keine Null-Mode. In den Arbeiten [75–77] wurde deshalb die Yukawa-Kopplung nicht bei verschwindender Energie, sondern bei der niedrigsten Matsubara-Mode definiert.

Wir können nun auch in der Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung die Reduktion auf das Funktional  $\bar{\Gamma}_\Lambda$  vornehmen und alle Summationen über Flavour-Indizes und Integrationen durchführen. Die Vertizes haben wir in Gl. 4.34 bereits angegeben. Wir geben die Details dieser Berechnung nicht mehr in der Ausführlichkeit wieder, wie wir das bei der Flussgleichung für das effektive Potenzial getan haben, das Ergebnis für die Flussgleichung der Yukawa-Kopplung lautet insgesamt:

$$\Lambda\partial_\Lambda h = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2}h^3 \left[ \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f^0)}{Z_\Lambda\omega_f^0(\omega_f^{0^2} - \omega_b^{0^2})} + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^0)\theta(\omega_b^{0^2})}{Z_\Lambda\omega_b^0(\omega_f^{0^2} - \omega_b^{0^2})} \right] \quad (4.39)$$

mit

$$\omega_f^0 = \sqrt{\Lambda^2 + 2m_T^2} \quad \omega_b^0 = \sqrt{\frac{Z_\Lambda\Lambda^2 + U'(0)}{Z_\Lambda}} \quad (4.40)$$

Neben der Yukawa-Kopplung benötigen wir noch eine Flussgleichung für den zweiten Parameter der fermionischen Zwei-Punkt-Funktion, die thermale Masse. Diese Flussgleichung leitet sich aus der Flussgleichung für die fermionische Zwei-Punkt-Funktion ab. Da die thermale Masse eine Größe des Fermionpropagators in der HTL-Approximation ist, werden wir die Integrale zur Berechnung der Flussgleichung dieses Parameters auch nur in der HTL-Approximation

ausführen. D.h. wir führen die Integrale zuerst mit den vollen HTL-Propagatoren Gl. 4.18, aber auch nur in der HTL-Approximation aus. Die explizite Berechnung dieser Flussgleichung zeigt, dass die HTL-Form des Propagators (Gl. 4.18) selbstkonsistent erhalten bleibt. Durch Projektion auf die einzelnen Impulsterme können wir daraus die Flussgleichung für die thermale Masse isolieren

$$\Lambda \partial_\Lambda m_T^2 = -h^2 \frac{\Lambda^3}{8\pi^2} \left[ 4 \left( \frac{N_{\text{FD}}(\omega_+)}{D'(\omega_+)} - \frac{N_{\text{FD}}(\omega_-)}{D'(\omega_-)} \right) + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma 2})}{2\omega_b^\sigma} + \frac{3 N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi 2})}{2\omega_b^\pi} \right]. \quad (4.41)$$

$D'(\omega)$  ist die Ableitung der Funktion  $D(\omega)$  aus Gl. 4.19, nun aber erweitert um eine zusätzliche chiral brechende Fermionmasse

$$D(\omega) = [1 + a(\omega, P)]^2 (\omega^2 - P^2) + 2[1 + a(\omega, P)] b(\omega, P) \omega + b(\omega, P)^2 - m_\chi^2. \quad (4.42)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind wieder die beiden Moden  $\omega_\pm$ . Anschließend entwickeln wir diese Flussgleichung wieder in Potenzen von  $m_T/P^2$ . Auf diese Weise haben wir den vereinfachten Fermion-Propagator 4.25 erhalten. Wir werten die Flussgleichung dann ebenfalls am Feldwert  $\rho = 0$  aus, da wir auch die Yukawa-Kopplung bei diesem Feldwert definiert haben. Letztlich erhalten wir damit als Flussgleichung für die thermale Masse:

$$\Lambda \partial_\Lambda m_T^2 = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} h^2 \left[ \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^0) \theta(\omega_b^{0 2})}{\omega_b^0} + \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f^0)}{\omega_f^0} \right] \quad (4.43)$$

Diese Flussgleichung ist wieder konsistent mit unserer Trunkierung der effektiven Mittelwert-Wirkung.

Ergänzend wollen wir anmerken, dass auch die Berechnung der Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung auf die eben beschriebene Weise durchgeführt werden kann. Man erhält das gleiche Ergebnis, das wir in Gl. 4.39 angegeben haben. Die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung ist also auch mit der HTL-Approximation voll konsistent.

Die skalare Wellenfunktionsrenormierung ist die letzte Größe, für die wir noch eine Flussgleichung benötigen. Diese lässt sich aus der Flussgleichung für die skalare Zwei-Punkt-Funktion 3.43 isolieren. Wir definieren die Wellenfunktionsrenormierung ebenfalls mit dem Pion als äußerem Feld. Allerdings ist die Auswertung in diesem Fall komplizierter, da wir die äußeren Impulse nicht gleich Null setzen können. Die Wellenfunktionsrenormierung beschreibt ja gerade das Verhalten der Zwei-Punkt-Funktion mit dem Impuls. Wir entwickeln deshalb den Integranden nach dem äußeren Impuls  $|\vec{p}|$ . Zur Auswertung der Integrale verwenden wir dann jeweils die Beziehung [31]

$$-2\pi i \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{1}{x + i\epsilon} \right)^{n+1} - \left( \frac{1}{x - i\epsilon} \right)^{n+1} \right]. \quad (4.44)$$

Anschließend isolieren wir den Term proportional zu  $\vec{p}^2$ . Damit erhalten wir insgesamt die Fluss-

gleichung für die skalare Wellenfunktionsrenormierung:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda Z_\Lambda = & -\frac{\sqrt{Z_\Lambda^3} \Lambda^5 \rho (U''(\rho))^2}{12\pi^2} \left( F(\omega_\sigma, \omega_\pi) + F(\omega_\pi, \omega_\sigma) \right) \Big|_{\rho=\rho_0} \\
& -\frac{N_c \Lambda^5 h^2}{12\pi^2 \omega_f^7} \left\{ \left[ 6 \frac{\omega_f^4}{\Lambda^2} - 3\omega_f^2 - 9 \frac{m_T^2 \omega_f^2}{\Lambda^2} + 10m_T^2 \right] \right. \\
& \quad \left. \left( -N_{\text{FD}}(\omega_f) + \beta \omega_f N_{\text{FD}}(\omega_f) (N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) \right) \right. \\
& \quad + \left[ \omega_f^2 + 3 \frac{\omega_f^2 m_T^2}{\Lambda^2} - 4m_T^2 \right] \beta^2 \omega_f^2 N_{\text{FD}}(\omega_f) (N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) (2N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} m_T^2 \beta^3 \omega_f^3 N_{\text{FD}}(\omega_f) (N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) (6N_{\text{FD}}(\omega_f)^2 - 6N_{\text{FD}}(\omega_f) + 1) \right\}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

mit

$$\begin{aligned}
F(\omega_\sigma, \omega_\pi) = & \frac{1}{\omega_b^\sigma \omega_b^\pi (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_b^{\pi^2})^3} \left\{ N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2}) \left( 6 \frac{\omega_b^{\pi^7}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 8\omega_b^{\pi^5} - 6 \frac{\omega_b^{\sigma^2} \omega_b^{\pi^5}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right) \right. \\
& + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) \left( 3\omega_b^{\sigma^5} - 3 \frac{\omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^2}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 10\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^2} + 12 \frac{\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^4}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right. \\
& \quad \left. \left. + 15\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^4} - 9 \frac{\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^6}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right) \right. \\
& - \frac{\beta}{\sqrt{Z_\Lambda}} N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) \\
& \quad \left( 3 \frac{\omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^3}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 3\omega_b^{\sigma^5} \omega_b^\pi + 10\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^3} - 6 \frac{\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^5}}{Z_\Lambda \Lambda^2} + 3 \frac{\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^7}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 7\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^5} \right) \\
& + \frac{\beta^2}{Z_\Lambda} N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) (1 + 2N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) \\
& \quad \left. \left( \omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^2} - 2\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^4} + \omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^6} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Die anomale Dimension ist im Rahmen der Renormierungsgruppe definiert als die Skalenabhängigkeit der Wellenfunktionsrenormierung

$$\eta = -\Lambda \partial_\Lambda \ln(Z_\Lambda) . \tag{4.47}$$

Damit haben wir alle wichtigen Flussgleichungen abgeleitet, im Anhang A sind die Ergebnisse nochmals übersichtlich zusammengefasst. Wir können nun daran gehen diese Gleichungen numerisch zu untersuchen.

### 4.3. Numerische Untersuchung des Modells

Wir stützen uns bei der numerischen Untersuchung des abgeleiteten Gleichungssystems auf Verfahren, die bereits in den Arbeiten von D’Attanasio und Pietroni [71], aber vor allem von Bergerhoff und Reingruber [89] angewendet wurden. Zuerst müssen wir bemerken, dass die Flussgleichung für das effektive Potenzial 4.35 eine partielle Differenzialgleichung ist. Die Funktionen  $\omega_b^\sigma$  und  $\omega_b^\pi$  enthalten schließlich höhere Ableitungen des Potenzials nach dem Feld. Die partielle Differenzialgleichung für das effektive Potenzial lässt sich durch sukzessives Ableiten nach dem Feld in ein System unendlich vieler gewöhnlicher Differenzialgleichungen der Funktionen  $U(\rho)$ ,  $U'(\rho)$ ,  $U^{(2)}(\rho)$  usw. umwandeln.

$$\begin{aligned}
 U(\rho) &= f_0(\Lambda, \rho, h_\Lambda, Z_\Lambda, U'(\rho), U^{(2)}(\rho)) \\
 U'(\rho) &= f_1(\Lambda, \rho, h_\Lambda, Z_\Lambda, U'(\rho), U^{(2)}(\rho), U^{(3)}(\rho)) \\
 U^{(2)}(\rho) &= f_2(\Lambda, \rho, h_\Lambda, Z_\Lambda, U'(\rho), U^{(2)}(\rho), U^{(3)}(\rho), U^{(4)}(\rho)) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Das Potenzial selbst kommt in den Funktionen  $f_i$  auf den rechten Seiten der Gleichungen gar nicht vor, es genügt also völlig, das System für die Ableitungen  $U'(\rho)$ ,  $U^{(2)}(\rho)$  usw. zu betrachten. (Das Potenzial haben wir schließlich nur durch Integration von  $U'(\rho)$  überhaupt erhalten). Man diskretisiert nun das Potenzial auf einem Gitter mit  $n$  Stützstellen  $\rho_i$ :

$$\begin{aligned}
 U'_i &= U'(\rho_i) & i = 1 \dots n \\
 U_i^{(2)} &= U^{(2)}(\rho_i) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Das Gleichungssystem 4.48 beschreibt dann das Verhalten des Potenzials an jedem einzelnen Gitterpunkt. D.h. man hat eigentlich  $n$  ungekoppelte Systeme unendlich vieler Differenzialgleichungen. Nun enthält aber jeweils die Gleichung der  $i$ -ten Ableitung Ableitungen bis zur  $(i + 2)$ -ten Ordnung. Trunkiert man das System bei einer endlichen Ordnung, so ist es nicht selbstkonsistent geschlossen. Die  $(i + 1)$ - und  $(i + 2)$ -Ableitung lassen sich aber durch eine ‘‘Matching-Prozedur’’ berechnen. Wir berechnen ja die Ableitungen als Funktionen des Feldes  $\rho$ , wenn auch nur diskretisiert. Fordern wir geeignete Stetigkeitsbedingungen für die Ableitungen bis zur  $i$ -ten Ordnung, legen diese die  $(i + 1)$ - und  $(i + 2)$ -Ableitung fest. Dadurch entsteht aber eine Kopplung zwischen den  $n$  Gleichungssystemen, die dann nicht mehr unabhängig voneinander sind. In der Praxis benützen wir jeweils die Flussgleichungen für die erste und zweite Ableitung. Diese enthalten die dritte und vierte Ableitung, die wir durch die Matching-Routine erhalten. Damit haben wir die Flussgleichung für das Potenzial in eine Form gebracht, die wir in eine numerische Prozedur umsetzen können.

Unser System von Gleichungen enthält daneben noch eine Differenzialgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung, die die Ableitungen des Potentials bis zur zweiten Ordnung am Potentialminimum enthält, und eine Gleichung für die Yukawa-Kopplung und die thermale Fermionmasse, die jeweils die erste Ableitung des Potentials bei  $\rho = 0$  enthalten. Alle Größen, die in diesen Gleichungen auftauchen, sind folglich gegeben, wir können diese Gleichungen ohne weitere Anstrengungen direkt in die Numerik übernehmen.

Insgesamt wird unser Modell in dieser Trunkierung also durch  $(2n + 3)$  unter anderem durch die Matching-Prozedur gekoppelte Differenzialgleichungen beschrieben. Ein solches System kann nun mit Standardmethoden numerisch gelöst werden. Wir benützen dazu einen Runge-Kutta-Integrator 4.-Ordnung mit automatischer Schrittweitenkorrektur [91].

Unser Hauptinteresse wird dem chiralen Phasenübergang dieses Systems gelten. Es wird im Allgemeinen erwartet, dass dieser im Zwei-Flavour-Fall ein Phasenübergang 2.-Ordnung ist. Da wir hier ein Zwei-Flavour-Modell betrachten, erwarten wir also einen Phasenübergang zweiter Ordnung (im Drei-Flavour-Fall hingegen ist ein Phasenübergang 1.-Ordnung möglich). Um einen Phasenübergang 2.-Ordnung zu identifizieren, kann man nach universellem, also kritischem Verhalten des Systems suchen. Universalität zeigt sich, wie wir in Kapitel 2 diskutiert haben, in Fixpunkten des Renormierungsgruppenflusses. Wir müssen also nach Fixpunktlösungen unserer Flussgleichungen suchen. Allerdings zeigen nicht die dimensionsbehafteten Größen unserer Flussgleichungen dieses Fixpunktverhalten, sondern geeignet definierte dimensionslose Größen. Da die kritische Physik im dreidimensionalen Limes stattfindet, muss eine Dimension jeder Größe durch die Temperatur aufgewogen werden, die Dimensionen der dreidimensionalen Größen werden dann durch entsprechende Potenzen der Skala  $\Lambda$  eliminiert. So hat z.B. das Potential die Dimension 4, um das entsprechende dimensionslose Potential zu erhalten teilen wir durch  $T\Lambda^3$ . Dieses dimensionslose Potential sollte dann am kritischen Punkt konstant werden, das dimensionsbehaftete Potential damit mit seiner natürlichen Dimension  $T\Lambda^3$  skalieren. Dieses Skalieren mit der natürlichen Dimension wird als Skalenverhalten bezeichnet. Da wir die Flussgleichung für das Potential in ein System gekoppelter Flussgleichungen von Ableitungen des Potentials an festen Gitterpunkten überführt haben, zeigt sich das universelle Verhalten mit einem konstant Werden sämtlicher Ableitungen des dimensionslosen Potentials. Die Yukawa-Kopplung und die thermale Fermionmasse werden wir nicht mit  $\Lambda$  skalieren, da man für diese Größen kein Skalenverhalten erwarten kann. Die Fermionen müssen schließlich im dreidimensionalen Limes entkoppeln. Die fermionischen Kopplungen sind in der reduzierten dreidimensionalen Theorie am Laufen überhaupt nicht beteiligt und somit konstant. Das hat aber nichts mit einer Fixpunktlösung dieser Kopplungen zu tun und unterscheidet sich damit grundsätzlich vom Skalenverhalten der bosonischen Kopplungen.

Da wir nun auch eine skalare Wellenfunktionsrenormierung berücksichtigen, renormieren wir zusätzlich die Größen, die somit lauten:

$$\lambda \equiv \frac{\Lambda}{T} \quad (4.50)$$

$$\kappa_r \equiv Z_\Lambda \frac{\rho}{\Lambda T} \quad (4.51)$$

$$u_r(\kappa_r) \equiv \frac{U(\rho)}{\Lambda^3 T} \quad (4.52)$$

$$\hat{h}_r \equiv \frac{h}{\sqrt{Z_\Lambda}} \quad (4.53)$$

$$\hat{m}_T \equiv \frac{m_T}{T} \quad (4.54)$$

Wir wollen die Flussgleichungen mit diesen dimensionslosen renormierten Größen aufstellen, dazu formulieren wir alle Teilchen-Pole und Verteilungsfunktionen mit diesen Größen:

$$\hat{\omega}_b^\sigma = \sqrt{1 + u'_r + 2\kappa_r u''_r} \quad (4.55)$$

$$\hat{\omega}_b^\pi = \sqrt{1 + u'_r} \quad (4.56)$$

$$\hat{\omega}_f = \sqrt{1 + \frac{\kappa_r}{2\lambda} \hat{h}_r^2 + 2\frac{\hat{m}_T^2}{\lambda^2}} \quad (4.57)$$

$$\hat{\omega}_b^0 = \sqrt{1 + u'_r(0)} \quad (4.58)$$

$$\hat{\omega}_f^0 = \sqrt{1 + 2\frac{\hat{m}_T^2}{\lambda^2}} \quad (4.59)$$

$$\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b) = \frac{1}{\exp(\lambda\hat{\omega}_b) - 1} \quad (4.60)$$

$$\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) = \frac{1}{\exp(\lambda\hat{\omega}_f) + 1} \quad (4.61)$$

Die Flussgleichungen erhalten aufgrund der Renormierung mit der skalaren Wellenfunktionsrenormierung zusätzliche Terme proportional zur anomalen Dimension. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda u_r &= -3u_r + \kappa_r u'_r (1 + \eta) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln(1 - \exp[-\lambda\hat{\omega}_b^\sigma]) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2) \right. \\ &\quad \quad \left. + 3 \ln(1 - \exp[-\lambda\hat{\omega}_b^\pi]) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) \right] \\ &\quad + \frac{4N_c}{\pi^2} \ln(1 + \exp[-\lambda\hat{\omega}_f]) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \hat{h}_r = \frac{\eta}{2} \hat{h}_r - \frac{\hat{h}_r^3}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} + \frac{\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f^0)}{\hat{\omega}_f^0} \right] \frac{1}{(\hat{\omega}_f^0)^2 - (\hat{\omega}_b^0)^2} \quad (4.63)$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \hat{m}_T^2 = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \hat{h}_r^2 \left[ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} + \frac{\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f^0)}{\hat{\omega}_f^0} \right] \quad (4.64)$$

und

$$\eta = \lambda \frac{\kappa_r (u_r^{(2)})^2}{12\pi^2} \left( F(\hat{\omega}_b^\sigma, \hat{\omega}_b^\pi) + F(\hat{\omega}_b^\pi, \hat{\omega}_b^\sigma) \right) \Bigg|_{\kappa_r = \kappa_{r,0}}$$

$$\begin{aligned}
& + N_c \frac{\hat{h}_r^2}{12\pi^2 \hat{\omega}_f^7} \left\{ \left[ 6\hat{\omega}_f^4 - 3\hat{\omega}_f^2 - 9\mu_T^2 \hat{\omega}_f^2 + 10\mu_T^2 \right] \right. \\
& \quad \left( -\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) + \lambda\hat{\omega}_f \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1) \right) \\
& \quad + \left[ \hat{\omega}_f^2 + 3\hat{\omega}_f^2 \mu_T^2 - 4\mu_T^2 \right] \lambda^2 \hat{\omega}_f^2 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1) (2\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1) \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} \mu_T^2 \lambda^3 \hat{\omega}_f^3 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1) (6\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f)^2 - 6\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) + 1) \right\} \\
& \hspace{15em} (4.65)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F(\hat{\omega}_b^\sigma, \hat{\omega}_b^\pi) &= \frac{1}{\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^5 ((\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - (\hat{\omega}_b^\pi)^2)^3} \\
& \left\{ \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2) (6(\hat{\omega}_b^\pi)^7 - 8(\hat{\omega}_b^\pi)^5 - 6(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 (\hat{\omega}_b^\pi)^5) \right. \\
& + \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 - 10(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 \\
& \quad + 12(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^4 + 15\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^4 - 9\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^6) \\
& - \lambda \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) + 1) (3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^3 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 \hat{\omega}_b^\pi \\
& \quad + 10(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^3 - 6(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^5 + 3\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^7 - 7\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^5) \\
& \left. + \lambda^2 \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) + 1) (2\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda\hat{\omega}_b^\pi) + 1) \right. \\
& \quad \left. \left( (\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 - 2(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^4 + \hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^6 \right) \right\} \hspace{1em} (4.66)
\end{aligned}$$

Alle Flussgleichungen sind wiederum in Anhang A zusammengefasst. Dort finden sich auch die Gleichungen für die ersten drei Ableitungen des effektiven Potentials.

Diese Flussgleichungen sind nun geeignet um nach universellem Verhalten des Systems zu suchen. Für die anomale Dimension können wir den Skalenlimes explizit angeben. Die Gleichung für die anomale Dimension vereinfacht sich im Skalenlimes, d.h. wenn  $\Lambda$  klein gegenüber allen anderen Skalen der Theorie wird, zu

$$\eta = \left[ \frac{\kappa_r (u_r^{(2)})^2}{6\pi^2} \frac{4(\hat{\omega}_b^\sigma)^4 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^4 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 (\hat{\omega}_b^\pi)^4 + 4(\hat{\omega}_b^\pi)^4}{(\hat{\omega}_b^\sigma)^6 (\hat{\omega}_b^\pi)^6} \right]_{\kappa_r = \kappa_{r,0}} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (4.67)$$

Wenn alle dimensionslosen Kopplungen des Systems einen Fixpunktwert annehmen, nimmt auch die anomale Dimension einen Fixpunktwert an. Zudem sehen wir an dieser Gleichung schon eine Grundeigenschaft, die von der geforderten Universalität verlangt wird: Der Fixpunktwert der anomalen Dimension hängt nicht von fermionischen Beiträgen ab!

Die Fixpunktwerte der Kopplungen müssen wir durch numerische Integration der Gleichungen finden. Für eine numerische Untersuchung müssen wir natürlich noch die  $(T = 0)$ -Kopplungen wählen. Die  $(T = 0)$ -Kopplungen sind für den Limes  $\Lambda/T \rightarrow \infty$  definiert, den wir numerisch natürlich nicht bilden können. Wir wählen als Startpunkt  $\Lambda/T = 30$ . Die Lösungen hängen nicht von dem genauen Wert des Startpunkts ab, solange man ihn groß genug wählt. Da die größten Beiträge zu den Flussgleichungen von Impulsen der Größe  $\Lambda/T \sim \mathcal{O}(1)$  herrühren, ist der Wert 30 praktisch mit dem Limes unendlich identisch. Zudem konnten wir explizit überprüfen, dass die Ergebnisse nicht von dem Startpunkt abhängen. Hier ist auch noch eine Anmerkung zu den Einheiten, in denen alle dimensionsbehafteten Größen bestimmt sind, notwendig. Im Prinzip sind in dem System zwei natürliche Skalen vorhanden, die Temperatur  $T$  und der  $(T = 0)$ -Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes  $\sigma_0$ . Wir können also alle dimensionsbehafteten Größen entweder in Einheiten der Temperatur oder in Einheiten des  $(T = 0)$ -Vakuumerwartungswertes angeben. Es erscheint uns zweckmäßiger hierfür den Vakuumerwartungswert zu wählen, da wir ja das Verhalten eines bestimmten Systems bzgl. der  $(T = 0)$ -Eigenschaften bei Temperaturänderungen studieren wollen. Da wir das Potenzial als Funktion der Invarianten  $\rho$  definiert haben, wählen wir nicht den Vakuumerwartungswert des Feldes, sondern  $\sqrt{\rho_0}$  als intrinsische Skala. Der Unterschied besteht lediglich in einem Faktor  $\sqrt{2}$ . Praktisch wählen wir lediglich unser Start-Potenzial so, dass der Vakuumerwartungswert  $\rho_0$  auf Eins normiert ist. Damit sind automatisch alle dimensionsbehafteten Größen in Einheiten von  $\sqrt{\rho_0}$  gegeben. Wenn wir die Temperatur oder eine andere dimensionsbehaftete Größe schlichtweg als Zahl angeben, ist das also immer in Einheiten des Vakuumerwartungswertes zu verstehen.

Als erstes untersuchen wir das Verhalten des dimensionslosen Minimums des Potenzials  $\kappa_{r,0}$  bei verschiedenen Temperaturen. Man findet, dass es für eine bestimmte Temperatur  $T = T_c$  im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  konstant wird. Für größere Temperaturen hingegen divergiert es in diesem Limes, während es für kleinere Temperaturen gegen Null geht. Das ist genau der erwartete Fixpunkt des Systems. Wir haben dieses Verhalten in Abbildung 4.4 dargestellt. Da wir uns für den Limes  $\lambda \rightarrow 0$  interessieren, ist es zweckmäßiger eine logarithmische Skala zu verwenden. Wir tragen deshalb meist  $t = \ln(\lambda)$  als Ordinate auf. In Abbildung 4.5 haben wir zusätzlich zum dimensionslosen Minimum noch die Ableitungen des Potenzials am Minimum und diverse andere Größen aufgetragen. Wir sehen, dass alle Kopplungen Skalenverhalten zeigen. (Mit Ausnahme der fermionischen Größen, die kein wirkliches Skalenverhalten zeigen können, wie wir diskutiert haben. Das Verhalten der Yukawa-Kopplung werden wir später noch genauer erläutern.) Die Temperatur wurde dabei sehr nahe zur kritischen Temperatur gewählt. Da wir numerisch diese natürlich nicht exakt erreichen können, werden im Limes  $t \rightarrow -\infty$  die Trajektorien letztlich irgendwann von den kritischen Trajektorien abweichen.

Wir haben damit gezeigt, dass das Flussgleichungssystem in der Tat den erwarteten Phasenübergang 2.-Ordnung aufweist. Wir wollen nochmals verdeutlichen, wie sich der Phasenübergang in den dimensionsbehafteten Größen äußert. Wir haben in Abbildung 4.7 die Temperaturentwicklung des effektiven Potenzial aufgetragen. Man erkennt, dass sich das Minimum des Potenzials, also der Ordnungsparameter des Systems, stetig von einem nicht-verschwindenden Wert bei  $(T = 0)$  zu Null bei der kritischen Temperatur  $T = T_c$  entwickelt. Oberhalb von  $T_c$  bleibt das Minimum des Potenzials dann bei Null. Das ist das nach der allgemeinen Klassifikation von Pha-

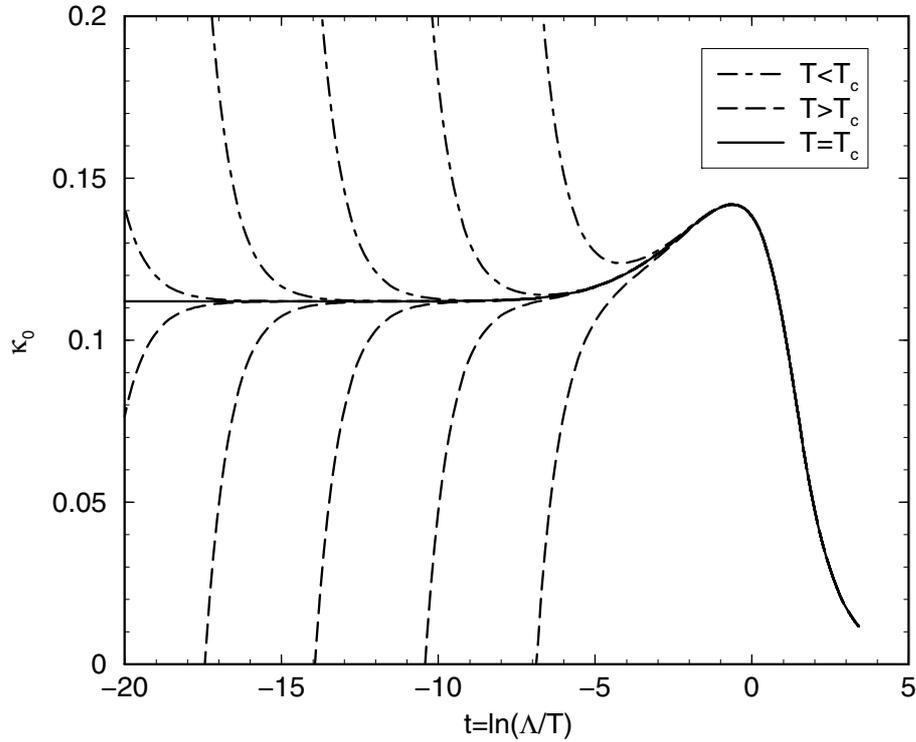


Abbildung 4.4: Das Laufen des dimensionslosen renormierten Vakuumerwartungswertes  $\kappa_{r,0}$  mit dem Skalenparameter  $t = \ln(\lambda)$  für verschiedene Temperaturen im Bereich  $|T - T_c| \sim 10^{-4} - 10^{-12}$ . Die Temperaturen der Trajektorien, die als erste von der kritischen Trajektorie abweichen, weisen die größte Differenz zur kritischen Temperatur auf. Die Werte der  $T = 0$  Kopplungen betragen  $h = 0.2$ ,  $g = 0.1$ . Die kritische Temperatur beträgt für diese Kopplungen  $T_c = 1.6848\dots$

senübergängen entscheidende Verhalten für einen Phasenübergang 2.-Ordnung. Das Potenzial bildet bei keiner Temperatur eine “Barriere” aus, wie sie bei einem Phasenübergang 1.-Ordnung zu sehen sein müsste. Der Vakuumerwartungswert als Funktion der Temperatur ist nochmal in Abbildung 4.8 dargestellt.

Zusätzlich wird ein Phasenübergang 2.-Ordnung durch das Divergieren der Korrelationslänge charakterisiert. Das äußert sich darin, dass alle skalaren Moden am kritischen Punkt masselos werden. Das ist ebenfalls in Abbildung 4.8 dargestellt. Gezeigt ist die Sigma-Masse als Funktion der Temperatur. Das Verschwinden der Sigma-Masse am kritischen Punkt ist deutlich zu erkennen. Die Pion-Masse lässt sich aus dieser Abbildung natürlich auch ablesen: In der gebrochenen Phase sind die Pionen Goldstone-Bosonen und damit exakt masselos. In der symmetrischen Phase haben alle Skalarfelder die gleiche Masse, da sie einen Vektor bzgl. der  $O(4)$ -Symmetrie bilden. Die Sigma- und die Pion-Masse sind also in der symmetrischen Phase gleich.

Zuletzt können wir noch das Verhalten des dimensionslosen Vakuumerwartungswertes im kritischen Bereich auf die dimensionsbehaftete Größe übertragen. Das Fixpunktverhalten der dimensionslosen Größe am kritischen Punkt bedeutet, dass der dimensionsbehaftete Vakuumer-

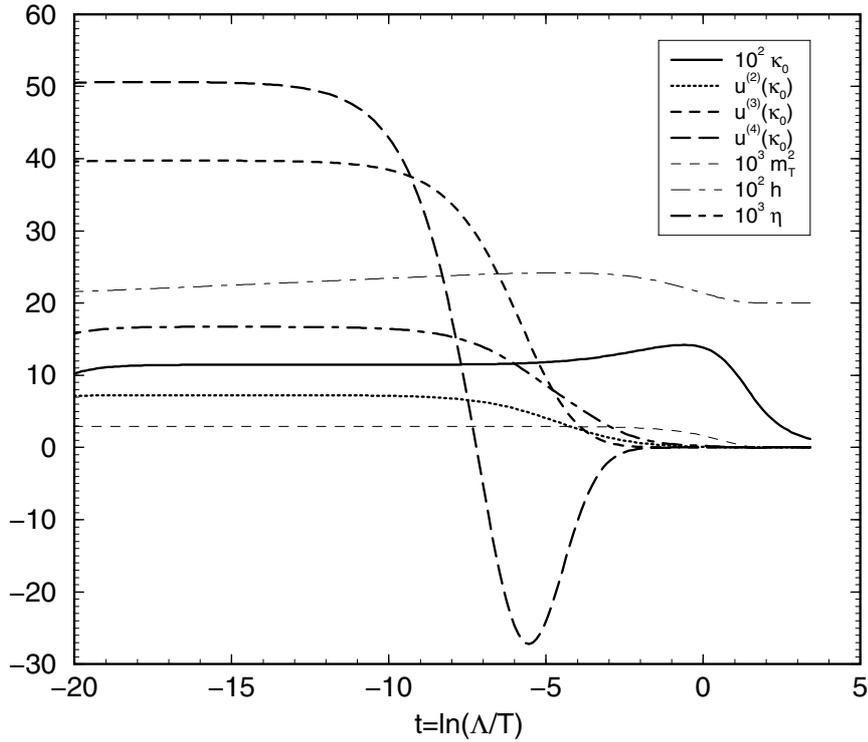


Abbildung 4.5: Skalenverhalten der dimensionslosen Kopplungen sehr nahe am Phasenübergang. Die Differenz zur kritischen Temperatur ist von der Größenordnung  $\Delta T \sim \mathcal{O}(10^{-12})$ . Die  $(T = 0)$ -Kopplungen betragen  $h = 0.2$ ,  $g = 0.1$ . Für das Verhalten der Yukawa-Kopplung siehe Text.

wartungswert sich im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  wie  $\rho_0 \sim T\Lambda$  verhält. Für Temperaturen unter der kritischen Temperatur gehen sowohl der dimensionslose als auch der dimensionsbehaftete Vakuumerwartungswert schon bei einem endlichen  $\lambda$  gegen Null. Bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur hingegen divergiert der dimensionslose Vakuumerwartungswert mit  $\kappa_{r,0} \sim (T\Lambda)^{-1}$ , was sich in ein konstant Werden des dimensionsbehafteten Vakuumerwartungswertes übersetzt. Dieses Verhalten haben wir in Abbildung 4.6 dargestellt.

Kommen wir nun noch zum Verhalten der Fermionen. Da die Fermionen im dreidimensionalen Limes entkoppeln müssen, können sie somit eigentlich kein Laufen mit  $\Lambda$  mehr zeigen. Die Yukawa-Kopplung und die thermale Fermionmasse sollten also ebenfalls konstant werden. Allerdings wurde die Yukawa-Kopplung mit der skalaren Wellenfunktionsrenormierung renormiert. Deshalb verhält sich die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung im Skalenlimes wie

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Lambda \partial_\Lambda \hat{h}_r = \frac{\eta}{2} \hat{h}_r . \quad (4.68)$$

D.h. lediglich die unrenormierte Kopplung wird im dreidimensionalen Limes konstant, wohingegen die renormierte Kopplung noch mit der anomalen Dimension läuft

$$\hat{h}_r \sim e^{\frac{\eta}{2}t} \quad (4.69)$$

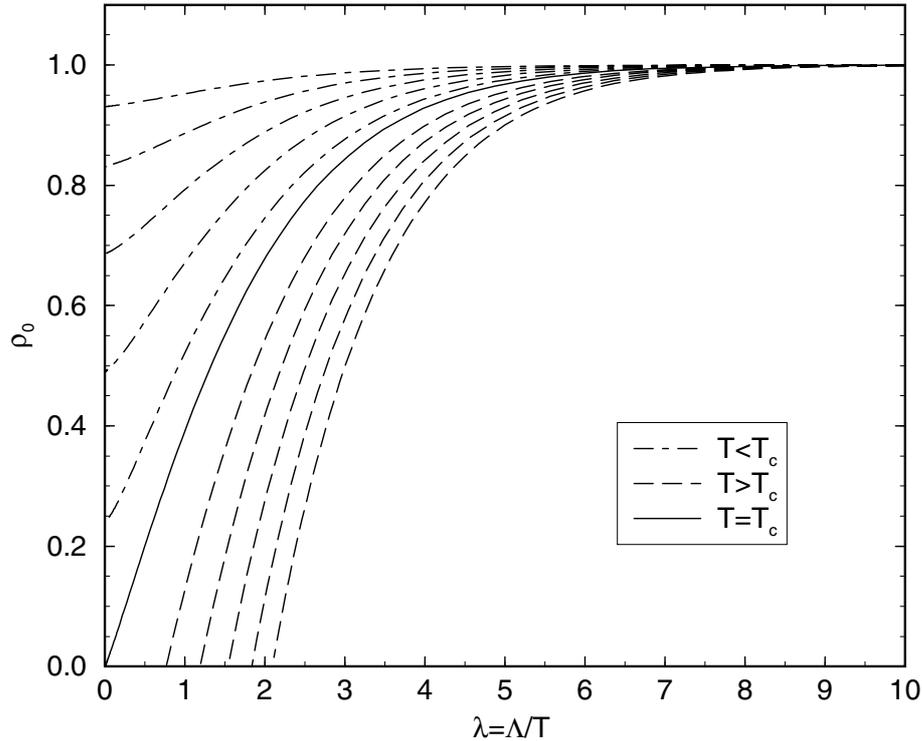


Abbildung 4.6: Das Laufen des dimensionsbehafteten Vakuumerwartungswertes  $\rho_0$  mit der Skala  $\lambda$  für Temperaturen von  $T = 0.5 \dots 3.0$ . Die Werte der  $(T = 0)$ -Kopplungen betragen  $h = 0.2$ ,  $g = 0.1$ . Die kritische Temperatur beträgt  $T_c = 1.6848 \dots$

und deshalb am kritischen Punkt exakt Null wird. Dieses Verhalten der renormierten und der unrenormierten Yukawa-Kopplung ist in Abbildung 4.9 dargestellt.

Das kritische Verhalten des Systems kann in der Nähe des Phasenübergangs nun auch quantitativ durch kritische Exponenten und Amplituden beschrieben werden. Das chirale Quark-Meson-Modell liegt in der Universalitätsklasse des  $O(4)$ -Modells. Das konnten wir im Rahmen unserer Berechnungen ebenfalls bestätigen. Wir konnten explizit überprüfen, dass die universellen Eigenschaften unabhängig von den Start-Kopplungen und insbesondere unabhängig von den zusätzlichen fermionischen Freiheitsgraden sind. Allerdings kann die Größe der kritischen Region von den zusätzlichen fermionischen Freiheitsgraden beeinflusst werden. Wir beschränken uns also im folgenden auf das Verhalten des  $O(4)$ -Modells. Das  $O(4)$ -Modell wurde im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe in niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung bereits von Bergerhoff und Reingruber diskutiert [89] und wird unter anderem Gegenstand einer weiteren Dissertation zu diesem Themengebiet sein. Wir werden in dieser Arbeit lediglich die wichtigsten Aussagen referieren und verweisen für eine ausführliche Diskussion auf die Dissertation von J. Reingruber. Wir wollen hier vor allem die neuen Zahlenwerte wiedergeben, die durch die verbesserte Analyse bis zur ersten Ordnung der Ableitungsentwicklung gewonnen wurden.

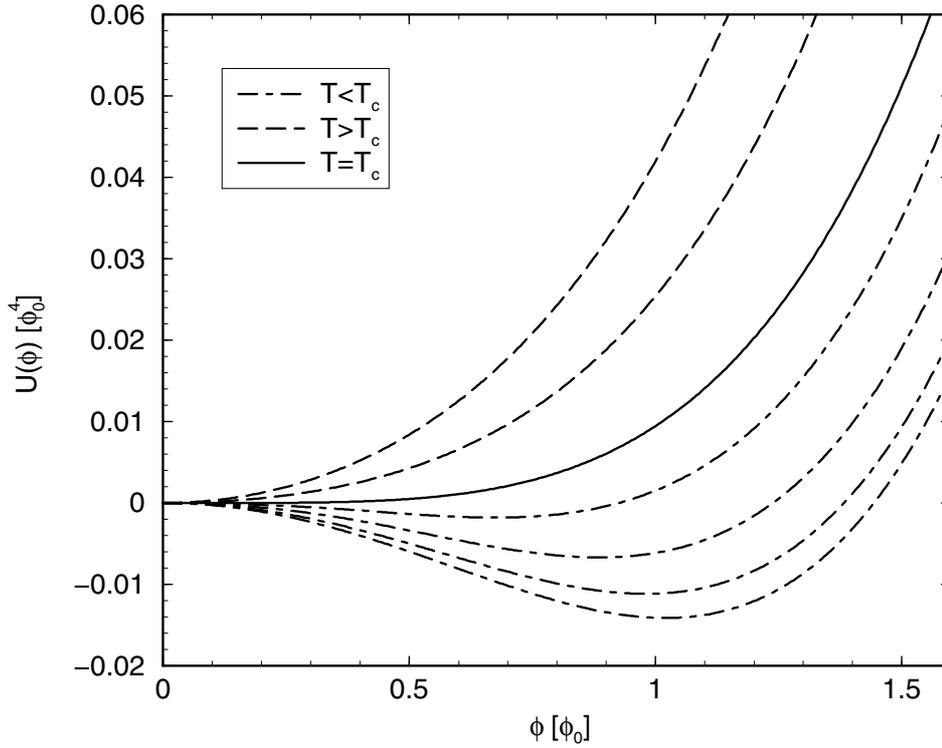


Abbildung 4.7: Das effektive skalare Potenzial bei verschiedenen Temperaturen. Die  $(T = 0)$ -Kopplungen betragen  $h = 0.2$ ,  $g = 0.1$ .

Das universelle Verhalten lässt sich aus der Skalenform der Zustandsgleichung

$$\frac{V(\varphi)}{\partial\varphi} = \varphi^\delta f(x) ; \quad x = \frac{T - T_c}{T_c} \varphi^{-\frac{1}{\beta}} \quad (4.70)$$

ableiten [94]. Dabei ist die sogenannte Widom-Skalenfunktion  $f(x)$  universell, bis auf eine Renormierung der Funktion selbst und des Funktionswertes  $x$ . Mit dem Limes  $x \rightarrow 0$  dieser Skalenfunktion

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = D \quad (4.71)$$

ergibt sich die Definition des kritischen Exponenten  $\delta$  als das Verhalten des effektiven Potentials am kritischen Punkt für kleine Feldwerte

$$\frac{V(\varphi)}{\partial\varphi} = D\varphi^\delta . \quad (4.72)$$

Die kritischen Exponenten  $\nu$  und  $\gamma$  sind durch das Verhalten der renormierten bzw. unrenormierten Masse definiert

$$\begin{aligned} \frac{m_r(T)}{T_c} &\propto \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^\nu \\ \frac{m(T)}{T_c} &\propto \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^{\frac{\gamma}{2}} , \end{aligned} \quad (4.73)$$

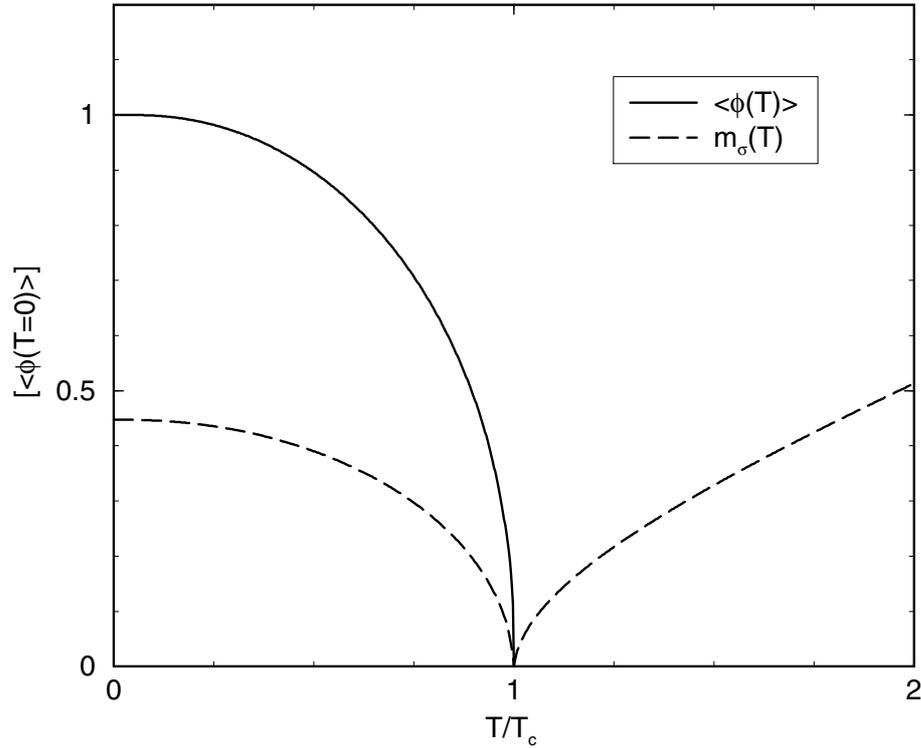


Abbildung 4.8: Das Verhalten des Vakuumerwartungswertes und Sigma-Masse in Einheiten des  $(T = 0)$ -Vakuumerwartungswertes als Funktion der Temperatur. Die  $(T = 0)$ -Kopplungen betragen  $h = 0.2$ ,  $g = 0.1$ .

der Exponent  $\beta$  durch das Verhalten des unrenormierten Vakuumerwartungswertes

$$\varphi_0 \propto \left( \frac{T - T_c}{T_c} \right)^\beta. \quad (4.74)$$

Der Wert der anomalen Dimension  $\eta$  ergibt sich direkt als der Fixpunktwert des Renormierungsgruppenflusses am kritischen Punkt.

Die Ergebnisse der Berechnungen der kritischen Exponenten im Rahmen dieser Arbeit, der Berechnungen in niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung von Bergerhoff und Reingruber sowie Ergebnisse diverser anderer Rechnungen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Als “beste Werte” sehen wir die Monte-Carlo-Resultate und die Ergebnisse der Sieben-Loop  $\epsilon$ -Entwicklung an.

Wie man aus Tabelle 4.1 ersehen kann, hat sich im Wesentlichen der Wert von  $\delta$  gegenüber dem Wert der niedrigsten Ordnung der Ableitungsentwicklung verbessert. Der Exponent  $\delta$  ist über die Skalenrelationen 4.75 direkt mit der anomalen Dimension  $\eta$  verknüpft. Da die anomale Dimension von unserer Rechnung in etwa reproduziert wird, muss auch  $\delta$  in etwa korrekt reproduziert werden. Die anderen kritischen Exponenten haben sich jedoch nur unwesentlich verbessert. Die Diskrepanz zu den Monte-Carlo- und  $\epsilon$ -Entwicklungs-Resultaten kann auf zwei Effekte zurückzuführen sein. Entweder sind andere Terme derselben Ordnung in der Ableitungsentwicklung

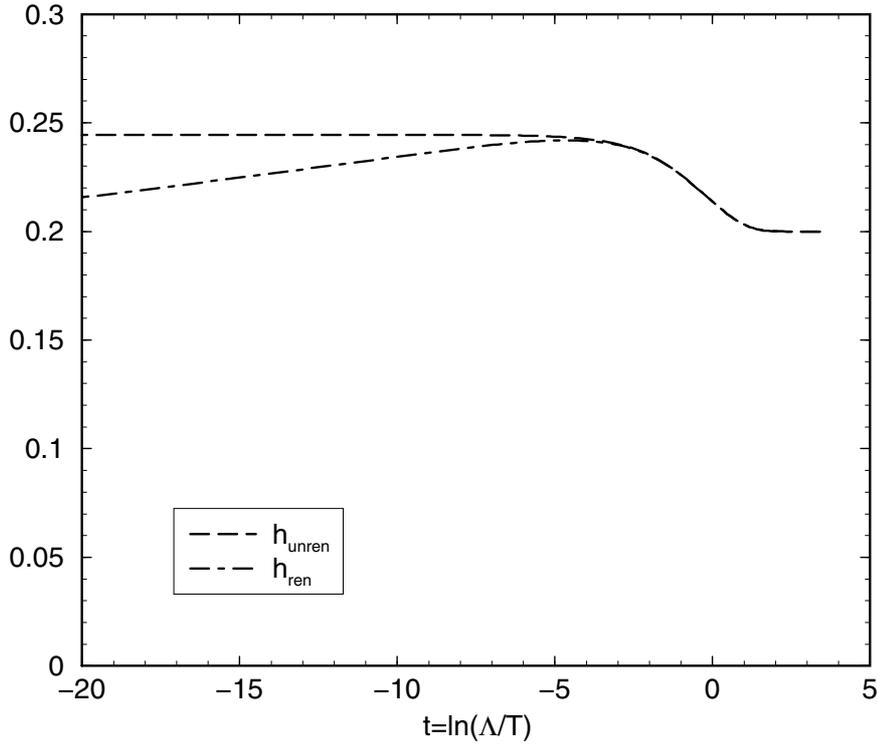


Abbildung 4.9: Das Laufen der renormierten und der unrenormierten Yukawa-Kopplung mit dem Skalenparameter  $t = \ln(\lambda)$ . Die  $(T = 0)$ -Kopplungen betragen  $h = 0.2$  und  $g = 0.1$ .

aber anderer Struktur, die wir vernachlässigt haben, dafür verantwortlich. So taucht in der Ableitungsentwicklung zusätzlich ein Term der Struktur  $Y(\rho)(\varphi^a \partial^\mu \varphi_a)(\varphi^b \partial_\mu \varphi_b)$  auf. Oder aber Terme höherer Ordnung in der Ableitungsentwicklung beeinflussen die kritischen Exponenten stärker als man es eigentlich erwartet. Welcher Effekt tatsächlich verantwortlich ist, kann nur eine explizite Überprüfung zeigen.

Die kritischen Exponenten sind nicht alle unabhängige Größen, sondern entsprechen lediglich zwei unabhängigen Variablen. Die Exponenten erfüllen somit Skalenrelationen bzw. Hyperskalenrelationen, die sie miteinander in Beziehung setzen. Diese lauten

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{\delta + 2 - \eta}{\delta - 2 + \eta} \\
 \gamma &= \nu(2 - \eta) \\
 \gamma &= \beta(\delta - 1) \\
 \beta &= \frac{\nu}{2}(\delta - 2 + \eta) .
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Diese Skalenrelationen werden von unseren Ergebnissen mit einer Genauigkeit von besser als 0.5% erfüllt. Diese Genauigkeit ist ein Maß für die numerischen Fehler, die bei der Integration der Flussgleichungen auftreten. Das bestätigt nochmals, dass die Diskrepanz unserer numerischen Ergebnisse zu den Monte-Carlo Resultaten von anderen Termen in der Ableitungsent-

	$\beta$	$\gamma$	$\nu$	$\delta$	$\eta$
TRG [90]	0.429	1.68	0.85	4.91	0.017
TRG + LO DE [89]	0.433	1.73	0.86	5.0	-
ERG [76]	0.407	1.548	0.787	4.80	0.0344
3d PT [92]	0.38	1.44	0.73	4.82	0.03
3d MC [93]	0.384	1.48	0.748	4.85	0.025

Tabelle 4.1: Zusammenfassung verschiedener Ergebnisse der kritischen Exponenten des  $O(4)$ -Modells. “TRG” stellt die Ergebnisse dieser Arbeit, “TRG + LO DE” die Ergebnisse der thermalen Renormierungsgruppe in der niedrigsten Ordnung der Ableitungsentwicklung dar. “ERG” bezeichnet die Ergebnisse der exakten Renormierungsgruppe, “3d PT” die einer Sieben-Loop perturbativen Rechnung in  $4 - \epsilon$  Dimensionen. “3d MC” schließlich sind die Resultate einer Monte-Carlo-Simulation.

wicklung herrühren muss und nicht auf numerische Fehler zurückzuführen sein kann.

Als einzige nicht-universelle Größe berechnen wir in dieser Arbeit die kritische Temperatur des Systems. Wir haben bereits ausführlich diskutiert, dass wir als Start-Kopplungen nur die Tree-Level Kopplungen benützen. Das sollte für kleine Werte der Kopplungen auch ausreichend sein, für große Werte der Kopplungen hingegen sind Abweichungen durch Quantenkorrekturen über die Startwerte zu erwarten. Wir beschränken uns deshalb in unserer Diskussion nicht-universeller Größen ausschließlich auf den Bereich kleiner Kopplungen. Ein weiterer Grund hierfür ist, dass ansonsten das Ein-Loop effektive Potenzial bei sehr hohen Feldwerten ein zweites Minimum entwickelt, also das Vakuum instabil wird. Im Ein-Loop Potenzial passiert das, wenn das Verhältnis  $h^2/g$  größer wird als etwa 1.4. Wir beschränken uns deshalb auf kleinere Werte dieses Verhältnisses. Zwar kann man argumentieren, dass ein zweites Minimum bei hohen Feldwerten dem Verhalten bei sehr hohen Energieskalen entspricht und deshalb für uns ohne Belang ist, wir gehen diesen Schwierigkeiten aber vollständig aus dem Weg, indem wir uns auf kleine Werte konzentrieren.

Die kritische Temperatur hängt sowohl von der Vier-Skalar-Kopplung  $g_{(T=0)}$  als auch von der Yukawa-Kopplung  $h_{(T=0)}$  ab. Die Abhängigkeit von der Vier-Skalar-Kopplung  $g_{(T=0)}$  im reinen  $O(N)$ -Modell wurde bereits in Ref. [89] diskutiert. Das Ergebnis dieser Arbeit ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Die Autoren haben zusätzlich ihr Ergebnis mit dem der exakten Renormierungsgruppe verglichen und sehr gute Übereinstimmung gefunden. Im Grenzfall  $g_{(T=0)} \rightarrow 0$  reproduziert man für die kritische Temperatur den perturbativen Wert

$$T_c^{\text{pert.}} = \sqrt{\frac{24}{N+2}\rho_{0,(T=0)}} \quad (4.76)$$

wie man es erwartet. Wir wollen in dieser Arbeit die Abhängigkeit der kritischen Temperatur  $T_c$  von der Yukawa-Kopplung diskutieren. Da im Grenzfall  $g_{(T=0)} \rightarrow 0$  aber  $h > 0$  das Start-Potenzial nicht symmetriebrechend ist, ist dieser Fall zur Untersuchung ungeeignet. Wir untersuchen deshalb den Fall kleiner aber konstanter Vier-Skalar-Kopplung  $g_{(T=0)} = \text{konst.}$  und variiere-

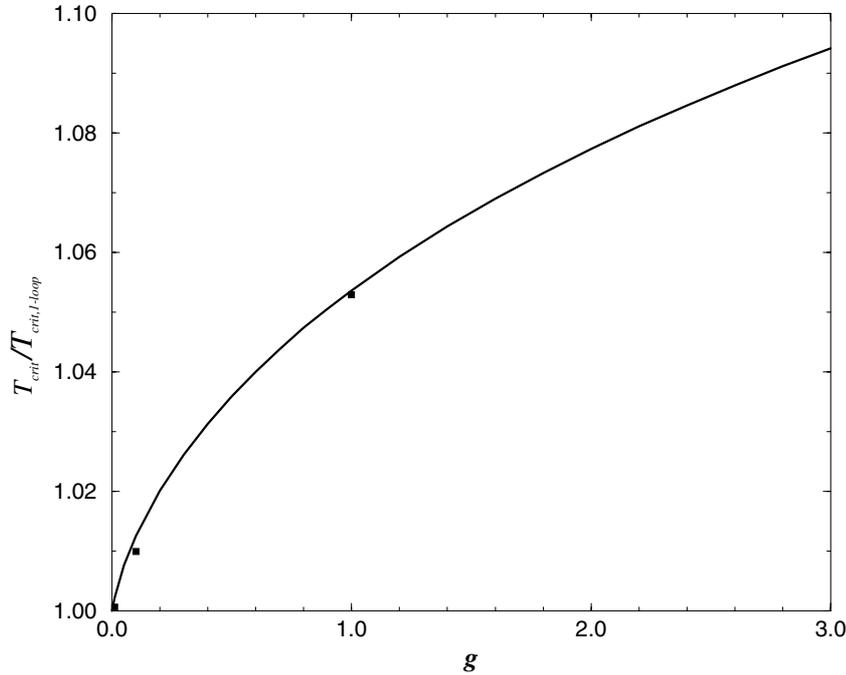


Abbildung 4.10: Vergleich des Resultats der thermalen Renormierungsgruppe und der Störungstheorie bzgl. der kritischen Temperatur nach [89] im reinen  $O(4)$ -Modell. Die Quadrate geben zusätzlich das Ergebnis der exakten Renormierungsgruppe [95] wieder.

ren die Yukawa-Kopplung. Störungstheoretisch hängt die kritische Temperatur in der folgenden Weise von den Kopplungen ab

$$T_c^{\text{pert.}} = \sqrt{\frac{4}{1+x} \rho_{0,(T=0)}} , \quad x = \frac{h^2(T=0)}{g(T=0)} . \quad (4.77)$$

Die Kopplungen tauchen hierbei also nur in der speziellen Kombination  $x$  auf. Darum betrachten wir die Abhängigkeit der kritischen Temperatur von dieser Variable  $x$ . Das Ergebnis unserer Berechnung ist in Abbildung 4.11 wiedergegeben. Um es mit dem perturbativen Ergebnis besser vergleichen zu können, haben wir in Abbildung 4.12 die relative Abweichung der beiden Resultate

$$\Delta T_c = \frac{T_c - T_c^{\text{pert.}}}{2(T_c + T_c^{\text{pert.}})} \quad (4.78)$$

aufgetragen. Wie man erkennen kann, wird das perturbative Ergebnis mit guter Genauigkeit reproduziert. Es darf nicht verwundern, dass im Gegensatz zu dem rein skalaren Fall in Abbildung 4.10 der relative Fehler nicht bei  $x \rightarrow 0$  verschwindet. Wir mussten schließlich eine konstante aber nicht-verschwindende Vier-Skalar-Kopplung vorgeben. Eine Übereinstimmung mit der Störungstheorie ist also nur in dem Doppellimes  $x \rightarrow 0$  und  $g(T=0) \rightarrow 0$  zu erwarten. Wie schon

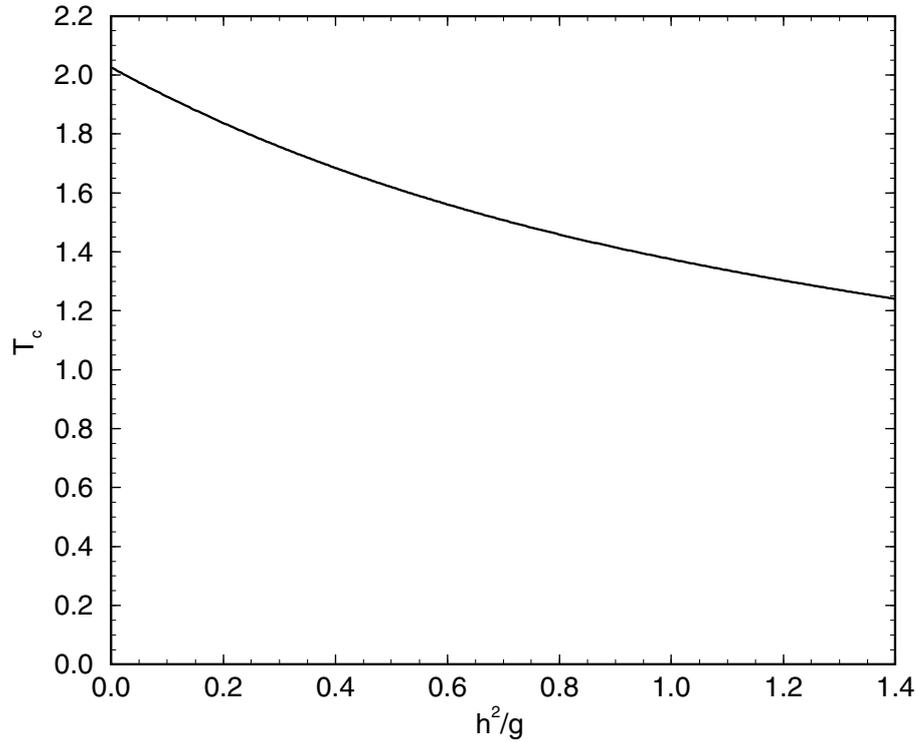


Abbildung 4.11: Die kritische Temperatur  $T_c$  als Funktion des Verhältnisses der  $(T = 0)$ -Kopplungen  $\frac{h^2}{g}$  bei festem  $g = 0.1$ .

ein Blick auf das perturbative Ergebnis zeigt, ist dieser Limes aber problematisch, da sich das Ergebnis hier nicht-analytisch verhält.

Damit beschließen wir die numerische Auswertung des chiralen Quark-Meson-Modells.

#### 4.4. Entkopplung fermionischer Freiheitsgrade

Wir haben bisher die Ergebnisse der thermalen Renormierungsgruppe im Rahmen des vorgestellten Näherungsschemas diskutiert. Wir haben für den vollen Fermionpropagator eine Form angenommen, die eine chiral-invariante thermale Masse enthält. Diese thermale Masse stellt den führenden Effekt einer nicht-lokalen Struktur dar. Wir wollen nun zeigen, dass dieser Effekt essenziell ist um an einem Phasenübergang 2.-Ordnung die Entkopplung der Fermionen und damit die Reduktion in den dreidimensionalen Limes zu gewährleisten. Außerdem wollen wir plausibel machen, dass die Näherung dieser nicht-lokalen Struktur durch einen lokalen, chiral-invarianten Massenterm nur einen kleinen Fehler produziert und deshalb unproblematisch ist.

Zunächst ist wesentlich festzustellen, dass sich der Mechanismus der Fermionentkopplung im Hochtemperatur-Limes prinzipiell vom Mechanismus an einem Phasenübergang 2.-Ordnung unterscheidet. Um diese Zusammenhänge zu untersuchen, genügt es ein vereinfachtes System von Flussgleichungen zu betrachten. Wir vernachlässigen deshalb die skalare Wellenfunktionsrenor-

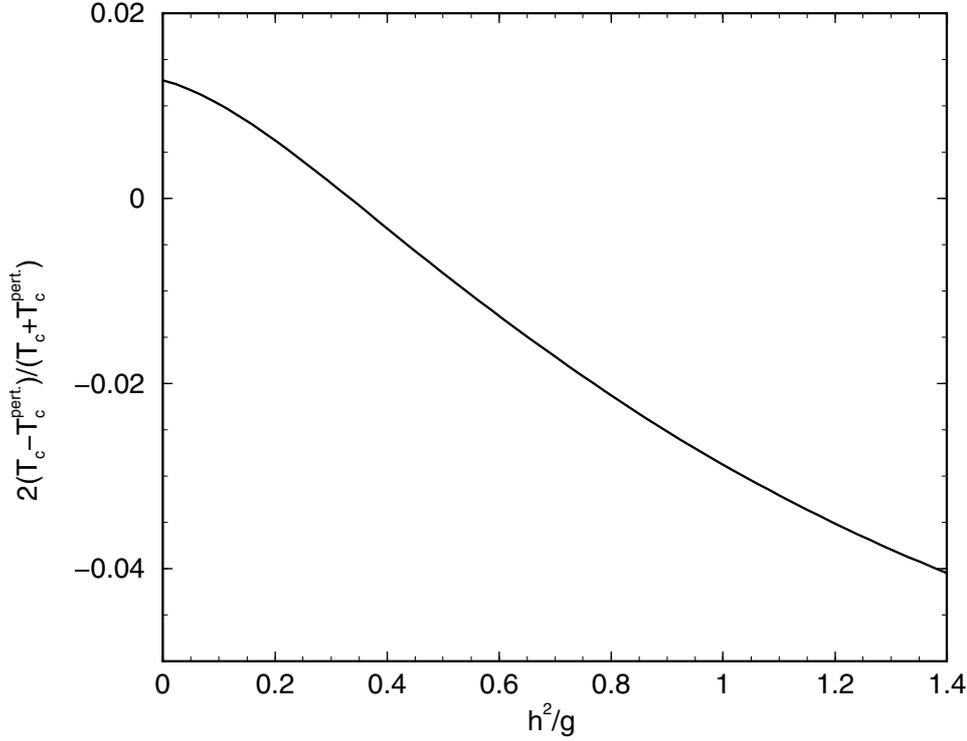


Abbildung 4.12: Relative Differenz der kritischen Temperatur als Funktion des Verhältnisses der  $(T = 0)$ -Kopplungen  $\frac{h^2}{g}$  bei festem  $g = 0.1$ . Unsere Ergebnisse im Vergleich zur Störungstheorie.

mierung, d.h. wir setzen  $Z_\Lambda = 1$ . Die Änderungen, die sich aufgrund der Wellenfunktionsrenormierung ergeben, werden wir danach kurz beschreiben.

Wir betrachten zunächst den Fall ohne eine thermale Masse für die Fermionen um zu demonstrieren, dass diese thermale Masse keinen Einfluss auf die Entkopplung der Fermionen im Hochtemperatur-Fall hat. Im Hochtemperaturlimes können wir die asymptotischen Ausdrücke

$$\begin{aligned} N_{\text{BE}}(\omega_b) &\xrightarrow{T \gg \omega_b} \frac{T}{\omega_b} \\ N_{\text{FD}}(\omega_f) &\xrightarrow{T \gg \omega_f} \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.79)$$

der Verteilungs-Funktionen in die Flussgleichungen einsetzen, diese nehmen dann die Form

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda U'(\rho)|_{hot} &= -\frac{T\Lambda^3}{4\pi^2} \left[ \frac{3U^{(2)}(\rho) + 2\rho U^{(3)}(\rho)}{\Lambda^2 + U'(\rho) + 2\rho U^{(2)}(\rho)} + \frac{3U^{(2)}(\rho)}{\Lambda^2 + U'(\rho)} \right] + \mathcal{O}(1) \\ \Lambda \partial_\Lambda h|_{hot} &= \frac{T\Lambda^3}{4\pi^2} h^3 \frac{1}{\lambda U'(0) (\Lambda^2 + U'(0))} + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (4.80)$$

an. Die Fermionbeiträge sind lediglich von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$ , während die bosonischen Beiträge von der Ordnung  $\mathcal{O}(T)$  sind. Die Fermionen entkoppeln im Hochtemperaturlimes daher rein

aufgrund der unterschiedlichen Statistiken von Fermionen und Bosonen. An einem Phasenübergang 2.-Ordnung hingegen ist dieser Mechanismus nicht realisiert. Das sieht man am leichtesten, wenn man die Flussgleichungen der dimensionslosen Größen betrachtet, denn: Während im Hochtemperatur-Limes die dimensionsbehafteten Größen im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  konstant werden, werden auf der kritischen Trajektorie die dimensionslosen Kopplungen (bzw. Ableitungen des effektiven Potenzials) konstant.

Problematisch ist das Verhalten der Flussgleichungen für sehr kleine Feldwerte, also im Grenzfall  $\rho = 0$ . Die dimensionslosen Flussgleichungen werden in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}\partial_t u'_r(0) &= -2u'_r(0) - \frac{\lambda}{4\pi^2} \left[ 6u_r^{(2)}(0) \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} \right] - \frac{N_c}{\pi^2} \hat{h}_r^2 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda) \\ \partial_t \hat{h}_r &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hat{h}_r^3}{u'_r(0)} \left[ \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda) + \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} \right] + \mathcal{O}(\lambda).\end{aligned}\quad (4.81)$$

Betrachten wir nun das Verhalten dieser Gleichungen im dreidimensionalen Skalenlimes, also für  $\lambda \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\partial_t u'_r(0) &= -2u'_r - \frac{1}{4\pi^2} \frac{6u_r''(0)}{1 - u'_r(0)} - \frac{N_c}{2\pi^2} \hat{h}_r^2 + \mathcal{O}(\lambda) \\ \partial_t \hat{h}_r &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{\hat{h}_r^3}{u'_r(0)} \left[ 1 + \frac{1}{\lambda(1 + u'_r(0))} \right]\end{aligned}\quad (4.82)$$

Man sieht, dass erstens der Fermion-Beitrag zur Flussgleichung des Potenzials von der gleichen Größenordnung ist wie der Boson-Beitrag. Die Fermionen entkoppeln somit nicht, ein möglicher Fixpunktwert für  $u'_r(0)$  hängt von dem Wert der Yukawa-Kopplung ab. Das widerspricht aber der Tatsache, dass der chirale Phasenübergang universelles Verhalten zeigen muss! Zweitens wird die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung nicht Null, die Yukawa-Kopplung wird somit nicht konstant. Bei einer Entkopplung der Fermionen hingegen würde man erwarten, dass die Kopplungen der Fermionen statisch werden. Die Flussgleichungen in dieser Form zeigen damit nicht das zu erwartende universelle Verhalten!

Wir wollen den Unterschied zum Hochtemperaturlimes nochmals anhand der dimensionsbehafteten Kopplungen verdeutlichen. Diese gehen am kritischen Punkt im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  mit  $\lambda$  gegen Null. Das Produkt von bosonischer Verteilungsfunktion, die mit  $\lambda^{-1}$  divergiert, mal Kopplung bleibt deshalb endlich. Die fermionische Verteilungsfunktion hingegen divergiert nicht, sondern nimmt den Wert  $1/2$  an, aber die Yukawa-Kopplung geht nicht gegen Null. Das Produkt ist somit ebenso von der Ordnung eins. Die Fermionen sind daher gegenüber den Bosonen nicht unterdrückt. Im Hochtemperaturlimes hingegen werden die skalaren Kopplungen im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  konstant, die bosonischen Beiträge divergieren somit. Die fermionischen Beiträge sind aber nach wie vor von der Ordnung  $\mathcal{O}(1)$  und somit unterdrückt. Die hier beschriebene Nicht-Entkopplung fermionischer Moden ist also eine spezielle Eigenschaft an einem Phasenübergang 2.-Ordnung. Was ändert sich nun durch das Einführen der thermalen Fermionmasse? Die Flussgleichungen 4.81 nehmen dann am Phasenübergang im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  die Form (für beliebig kleine aber

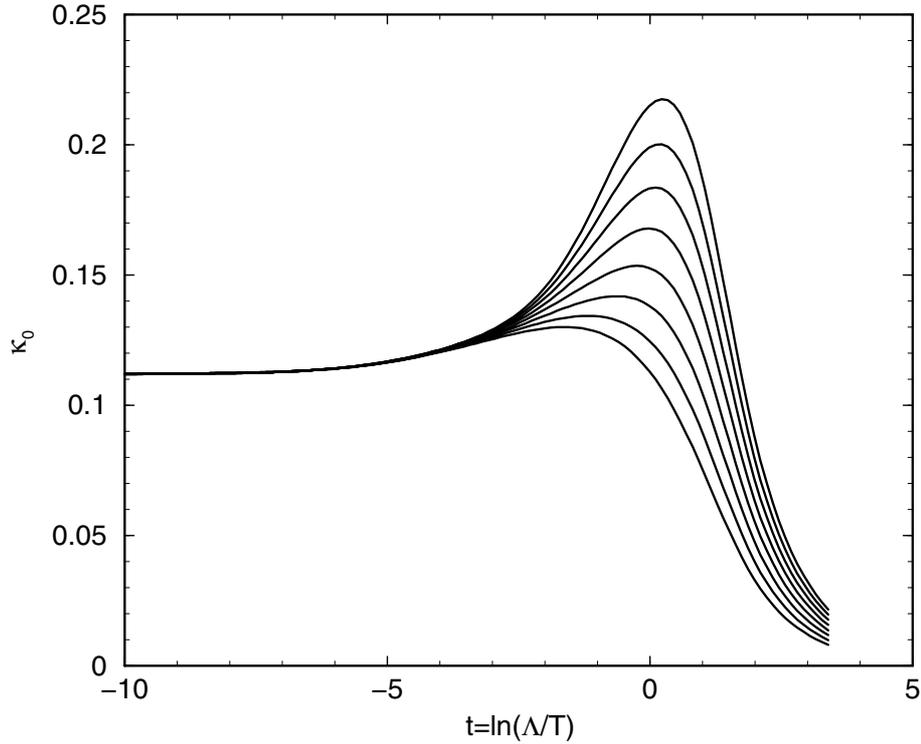


Abbildung 4.13: Die Entkopplung der fermionischen Freiheitsgrade. Aufgetragen ist das Laufen des dimensionslosen Vakuumwertes mit dem Skalenparameter  $t$ . Das Verhältnis der  $(T=0)$ -Kopplungen  $\frac{\hat{h}^2}{g}$  beträgt 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4 von der untersten zur obersten Trajektorie.

nicht-verschwindende thermale Fermionmasse)

$$\begin{aligned}
 \partial_t u'_r(0) &= -2u'_r(0) - \frac{1}{4\pi^2} \frac{6u^{(2)}(0)}{1-u'_r(0)} - \underbrace{\lambda^2 \frac{N_c \hat{h}_r^2}{2\pi^2} \frac{1}{\lambda^2 + 2\hat{m}_T^2}}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} \\
 \partial_t \hat{h}_r &= -\lambda \underbrace{\frac{\hat{h}_r^3}{4\pi^2} \left[ \frac{\frac{\lambda^3}{2}}{\lambda^2 + \hat{m}_T^2} + \frac{1}{1+u'_r(0)} \right]}_{\mathcal{O}(\lambda)} \frac{1}{\hat{m}_T^2 - \lambda^2 u'_r(0)} \\
 \partial_t \hat{m}_T^2 &= -\underbrace{\frac{\hat{h}_r^2}{4\pi^2} \lambda \left[ \frac{1}{1+u'_r(0)} + \frac{\frac{\lambda^3}{2}}{\hat{m}_T^2 + \lambda^2} \right]}_{\mathcal{O}(\lambda)}
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

an. Man sieht nun, dass erstens die Fermionbeiträge zur Flussgleichung des Potentials verschwinden, und zweitens die fermionischen Größen Yukawa-Kopplung und thermale Masse statisch werden. Die Entkopplungseigenschaften sind somit, wie man sie in diesem Modell erwar-

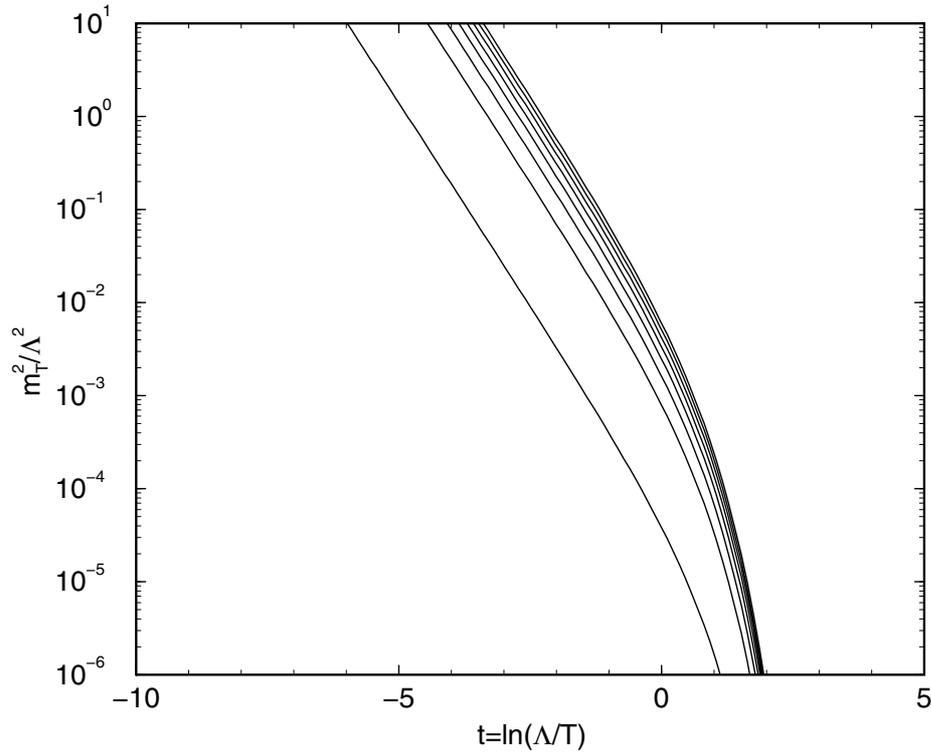


Abbildung 4.14: Das Laufen der dimensionslosen thermalen Fermionmasse  $m_T^2/\Lambda^2$  mit dem Skalenparameters  $t$ . Das Verhältnis der  $(T=0)$ -Kopplungen  $h^2/g$  beträgt 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4 von der Kurve links bis zur Kurve rechts.

tet. Die Anwesenheit der thermalen Masse ist essenziell für das richtige universelle Verhalten des Modells.

Die einzige *qualitative* Änderung, die durch die Wellenfunktionsrenormierung auftritt, betrifft die Yukawa-Kopplung. Die Flussgleichung der renormierten Yukawa-Kopplung reduziert sich im Skalenlimes auf

$$\partial_t \hat{h}_r = \frac{\eta}{2} \hat{h}_r \quad (4.84)$$

und die renormierte Yukawa-Kopplung wird folglich am kritischen Punkt nicht konstant, sondern geht gegen Null. Das haben wir bereits im vorigen Abschnitt diskutiert und in Abbildung 4.9 dargestellt. Dieses Laufen der renormierten Yukawa-Kopplung hängt aber rein an der anomalen Dimension und wird nicht durch fermionische Beiträge selbst verursacht. Es bewirkt deshalb auch keine Änderung der Entkopplung der Fermionen. Es bleibt die Tatsache, dass die fermionischen Beiträge zum Laufen aller Kopplungen verschwinden. Das ist ausreichend um Universalität zu gewährleisten.

In Abb. 4.13 ist das Laufen des dimensionslosen Vakuumerwartungswertes mit der Skala  $\lambda$  für verschiedene Yukawa-Kopplungen gezeigt. Diese Abbildung zeigt die eben beschriebene Entkopplung der Fermionen am kritischen Punkt explizit. Der Fixpunktwert ist in der Tat unabhängig von der Yukawa-Kopplung und damit universell. Außerdem kann man eine weitere Tatsache,

auf die wir schon hingewiesen haben, beobachten. Der Hauptbeitrag zum nicht-trivialen Laufen des dimensionslosen Vakuumenergiewertes rührt von Impulsen von der Größenordnung der Temperatur her. Vollständig entkoppelt sind die Fermionen aber erst bei einer deutlich niedrigeren Skala als der Temperatur.

Nachdem wir die Wichtigkeit der thermalen Fermionmasse dargelegt haben, ist nun noch zu zeigen, dass die Näherung des nicht-lokalen HTL-Propagators durch einen lokalen chiralinvarianten Massenterm keinen sehr großen Fehler produziert. Wie aus Gleichung 4.25 ersichtlich ist, hat man dazu Terme der Größe  $\frac{m_T^2}{P}$  mit Termen der Größe  $P$  bzw.  $m_\chi$  zu vergleichen. Da der einzige auftretende Impuls immer  $\Lambda$  ist und in den Fällen, die wir betrachtet haben, stets  $\Lambda > m_\chi$  gilt, setzen wir  $P = \Lambda$ . Die Näherung sollte also ausreichend sein, solange  $\frac{m_T^2}{\Lambda^2} < 1$  gilt. Dazu tragen wir diese Größe als Funktion von  $\Lambda$  wiederum für verschiedene Yukawa-Kopplungen bei der kritischen Temperatur auf, siehe Abbildung 4.14. Wir sehen, dass die Näherung umso länger gut bleibt, je kleiner die Yukawa-Kopplung ist. Zudem ist die Näherung selbst für den größten gewählten Wert der Yukawa-Kopplung gut bis zu  $t \approx -2$ . Wenn wir das mit der Abbildung 4.13 vergleichen, erkennen wir, dass die Fermionen bei dieser Skala bereits weitgehend entkoppelt sind und man den dreidimensionalen Limes erreicht hat. Wir können deshalb davon ausgehen, dass diese Näherung für den Bereich der  $(T = 0)$ -Kopplungen, auf den wir uns aus diversen Gründen in dieser Arbeit beschränkt haben, befriedigende Ergebnisse liefert.

## 4.5. Vergleich mit anderen Arbeiten

In diesem Abschnitt wollen wir die Resultate anderer Ansätze, den chiralen Phasenübergang zu studieren, darstellen und unsere Ergebnisse mit ihnen vergleichen. In Bezug auf das kritische Verhalten des  $O(4)$ -Modells haben wir das bereits im vorherigen Abschnitt getan, dort haben wir die universellen kritischen Exponenten sowohl mit den Ergebnissen der exakten Renormierungsgruppe als auch mit Monte-Carlo-Simulationen und der sog. “Epsilon-Entwicklung” verglichen. Das universelle Verhalten des  $O(4)$ -Modells wird, wie wir gesehen haben, gut durch die thermale Renormierungsgruppe wiedergegeben. Dabei ist es noch nicht einmal selbstverständlich die korrekte Ordnung des Phasenübergangs zu reproduzieren. Die Hochtemperatur-Entwicklung des Ein-Loop effektiven Potenzials des  $O(4)$ -Modells zeigt fälschlicherweise einen Phasenübergang erster Ordnung an [96]. Selbst Daisy-resummierte Störungstheorie liefert dieses falsche Ergebnis.

Nun wollen wir unsere Ergebnisse noch weitergehend mit anderen bekannten Resultaten in Beziehung setzen. Da die meisten anderen Untersuchungen aber direkt im Zusammenhang zur QCD erfolgten, ist ein fairer Vergleich nur möglich, wenn wir jetzt auch den Versuch unternehmen, die thermale Renormierungsgruppe auf die QCD anzuwenden. Wir werden also jetzt all unserer eigenen Warnungen über das  $(T = 0)$ -Start-Potenzial und den Zusammenhang zur Niederenergie-QCD (siehe Abschnitte 3.2.1, 4.1) zum Trotz versuchen die  $(T = 0)$ -Kopplungen den QCD-Daten anzupassen (siehe Ref. [75, 97]). Dass wir die  $(T = 0)$ -Kopplungen sehr groß wählen müssen, führt zu einer gewissen Instabilität des numerischen Verfahrens. Wir vernachlässigen deshalb jetzt die anomale Dimension, da dadurch die Numerik stabilisiert wird. Das bringt nur einen un-

wesentlichen zusätzlichen Fehler von ca. 2% Prozent und ist gegenüber den Fehlern durch das stark vereinfachte Start-Potenzial sicher zu vernachlässigen.

Als intrinsische QCD-Skala wählen wir die Pion-Zerfallskonstante, die mit dem Vakuum Erwartungswert in unserer Konvention in folgendem Zusammenhang steht

$$f_\pi = \sqrt{2\rho_{0,(T=0)}} . \quad (4.85)$$

Die Constituent-Quark-Masse und die Sigma-Masse ergeben sich damit als Funktion der Pion-Zerfallskonstante

$$\begin{aligned} M_q^2 &= \frac{h_{(T=0)} f_\pi^2}{4} \\ M_\sigma^2 &= U^{(2)} \left( \frac{f_\pi^2}{2} \right) f_\pi^2 . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Aus diesen Beziehungen können wir unsere ( $T=0$ )-Kopplungen nach Vorgabe der Constituent-Quark-Masse und der Sigma-Masse bestimmen. Wir wählen als Werte

$$\begin{aligned} f_\pi &= 93 \text{ MeV} \\ M_q &\approx 300 \text{ MeV} \\ M_\sigma &\approx 600 \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (4.87)$$

Die Massen sind mehr als Größenordnungen aufzufassen, aus den genannten Gründen sind genauere Werte nicht sinnvoll. Damit erhalten wir als Start-Kopplungen

$$\begin{aligned} h &\approx 6.5 \\ g &\approx 41 . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Obwohl diese Werte extrem groß erscheinen, ist das Verhältnis nur  $x = \frac{h^2}{g} \approx 1$  und damit noch im Rahmen der Werte, bei denen das Start-Potenzial auf Ein-Loop Niveau stabil bleibt.

#### 4.5.1. Chirale Störungstheorie

Das Temperaturverhalten der QCD wurde im Rahmen der chiralen Störungstheorie [98–100] bis auf Drei-Loop-Niveau berechnet. Die chirale Störungstheorie legt ein nicht-lineares Sigma-Modell zugrunde und ist somit das einfachste Modell zur Beschreibung der chiralen Symmetriebrechung. Es enthält als skalare Moden nur die drei pseudoskalaren Pionen als Goldstone-Moden. Damit ist dieses Modell prinzipiell nur in der gebrochenen Phase definiert und nicht geeignet den Phasenübergang selbst zu beschreiben. Zwar entspricht das Verhalten des Ordnungsparameters im Limes  $T \rightarrow T_c$  der Definition eines Phasenübergangs 2.-Ordnung, dieser zeigt aber nicht das korrekte kritische Verhalten. Im Limes kleiner Temperaturen sollte die chirale Störungstheorie die Temperaturabhängigkeit richtig beschreiben. Das Temperaturverhalten des chiralen Kondensats lautet im chiralen Limes in Drei-Loop-Näherung [101, 102]

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T) = \langle \bar{\psi}\psi \rangle(T=0) & \left[ 1 - \frac{N_f^2 - 1}{N_f} \frac{T^2}{12f_\pi^2} - \frac{N_f^2 - 1}{2N_f^2} \left( \frac{T^2}{12f_\pi^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + N_f(N_f^2 - 1) \left( \frac{T^2}{12f_\pi^2} \right)^3 \ln \left( \frac{T}{\Gamma_1} \right) \right] + \mathcal{O}(T^8). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Diese Formel enthält die zusätzliche Skala  $\Gamma_1$ . Diese ist mit der D-Wellen Isospin Null Pion-Pion Streulänge verbunden, der experimentelle Wert beträgt

$$\Gamma_1 = (470 \pm 100) \text{ MeV}. \quad (4.90)$$

#### 4.5.2. Die exakte Renormierungsgruppe

Die Formulierung der exakten Renormierungsgruppe haben wir in Kapitel 3 bereits vorgestellt. Wir wollen hier nur die Frage der Start-Wirkung noch genauer erläutern. Man geht dabei von folgendem Bild aus. Für Energieskalen größer als ca. 1.5 GeV sind die relevanten Freiheitsgrade der QCD Quarks und Gluonen, die durch perturbative QCD gut beschrieben werden können. Im Bereich 600 MeV – 1.5 GeV werden nicht-lokale Quark-Quark Wechselwirkungen immer stärker, bis sich bei etwa  $\Lambda_\Phi \approx 630$  MeV Meson Bindungszustände ausbilden. Die relevanten Zustände für kleinere Energien sind also Quarks und Mesonen. Die Gluonen können durch die Anwendung einer Renormierungsgruppen-Prozedur ausintegriert werden [59], sodass man das Meson-Potenzial bei der Compositness-Skala  $\Lambda_\Phi$  erhält. Das Meson-Potenzial ist bei dieser Skala aber noch nicht symmetriebrechend! Die chirale Symmetrie wird dann erst durch Ausbildung eines nicht-trivialen Minimums im Meson-Potenzial bei einer Skala von etwa  $\Lambda_\chi \approx 400$  MeV gebrochen. Das wird durch eine weitere Anwendung der Renormierungsgruppe auf das Quark-Meson-Modell beschrieben. Beide Skalen liegen aber noch über der Confinement Skala  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . In der Praxis werden nun die Parameter des Quark-Meson-Modells an der Compositness-Skala  $\Lambda_\Phi$  so eingestellt, dass der Renormierungsgruppenfluss bei ( $T = 0$ ) im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  die physikalischen ( $T = 0$ )-Messgrößen liefert. Dann wird das Renormierungsgruppenlaufen bei nicht-verschwindender Temperatur wiederholt und so werden im Limes  $\Lambda \rightarrow 0$  die thermalen Messgrößen berechnet. Dieses Vorgehen wäre im Grenzfall  $\Lambda_\Phi \rightarrow \infty$  exakt, da dann die Wirkung an der Compositness-Skala die klassische Wirkung wäre (siehe Kapitel 3). So aber sind die Parameter an der Compositness-Skala nicht vollständig temperaturunabhängig. Man kann auf diese Weise die Temperatur folglich nicht beliebig groß werden lassen. Die Autoren der Arbeiten [75–77] schätzen ab, dass dieses Vorgehen bis zu Temperaturen von etwa 170 MeV korrekt ist. (Zusätzlich werden bei höheren Temperaturen andere Bindungszustände wichtig.) Eine genaue Abschätzung der Fehler und damit eine Abschätzung, bis zu welcher Temperatur das Verfahren gut ist, erscheint uns jedoch problematisch.

#### 4.5.3. Gitter-QCD

Das thermodynamische Verhalten von QCD wurde auch mittels Gitter-Eichtheorien simuliert. Leider ist gerade der chirale Limes von besonderer Schwierigkeit. Die Gitter-Rechnungen

	TRG	ERG [76]	Gitter [103, 104]
$T_c$ [MeV]	134	116	140 – 150

Tabelle 4.2: Die kritische Temperatur des chiralen Phasenübergangs im chiralen Limes der Zwei-Flavour-QCD, berechnet nach verschiedenen Methoden. Die Autoren in [76] haben einen niedrigeren Wert für das Resultat der exakten Renormierungsgruppe angegeben. Sie haben aber einen kleineren Wert für die Pion-Zerfallskonstante verwendet. Wir haben den Wert deshalb auf den hier angenommenen Wert der Pion-Zerfallskonstanten umgerechnet.

müssen bei nicht-verschwindenden Current-Quark-Massen durchgeführt werden und dann in den chiralen Limes extrapoliert werden. Ein Vergleich des Temperaturverhaltens des chiralen Kondensats ist deshalb kaum möglich. Allenfalls die kritische Temperatur kann in den chiralen Limes extrapoliert werden und kann mit unserem Ergebnis verglichen werden.

#### 4.5.4. Vergleich der Resultate

Kommen wir damit zum Vergleich der verschiedenen Resultate. In Tabelle 4.2 sind die verschiedenen Ergebnisse der kritischen Temperatur von Zwei-Flavour-QCD im chiralen Limes wiedergegeben. Wie wir sehen, wird der Gitter-Wert durch die thermale Renormierungsgruppe recht gut erreicht, die exakte Renormierungsgruppe liegt ebenfalls recht nahe an diesem Wert, liefert aber eine etwas niedrigere kritische Temperatur. Die chirale Störungstheorie ist praktisch gar nicht in der Lage die kritische Temperatur zu reproduzieren, da sie nur für Temperaturen deutlich unter der kritischen Temperatur Gültigkeit hat, wir haben auf die Angabe eines Wertes verzichtet.

In Abbildung 4.15 ist schließlich die Temperaturabhängigkeit des chiralen Kondensats aufgetragen. Es sind die Ergebnisse der thermalen Renormierungsgruppe, der exakten Renormierungsgruppe sowie der chiralen Störungstheorie aufgetragen. Wie man erkennt, stimmen die Ergebnisse bei niedrigen Temperaturen gut überein. Das Ergebnis der thermalen Renormierungsgruppe zeigt bei niedrigen Temperaturen keine sichtbaren Unterschiede zur chiralen Störungstheorie, während die exakte Renormierungsgruppe bereits in diesem Bereich kleine Unterschiede zur chiralen Störungstheorie aufweist. Die Begründung der Autoren in [69, 76], dass die Vernachlässigung der Sigma- und Quark-Loops in der chiralen Störungstheorie hierfür verantwortlich sei, erscheint uns aufgrund der guten Übereinstimmung unserer Ergebnisse mit der chiralen Störungstheorie zweifelhaft. Die thermale Renormierungsgruppe zeigt dann bei Temperaturen  $T > 1.1f_\pi$  deutliche Abweichungen von der chiralen Störungstheorie, wohingegen die exakte Renormierungsgruppe schon bei etwa  $T > 0.8f_\pi$  signifikante Abweichungen zeigt. Bei höheren Temperaturen hingegen weicht die chirale Störungstheorie schließlich, wie zu erwarten war, stark von den Renormierungsgruppen-Ergebnissen ab und zeigt völlig falsches kritisches Verhalten. Die Renormierungsgruppen-Ansätze reproduzieren beide das kritische Verhalten gut, wie wir zuvor dargestellt haben, die kritischen Temperaturen weichen aber etwas voneinander ab, weshalb auch die Kurven in diesem Bereich deutlich voneinander abweichen.

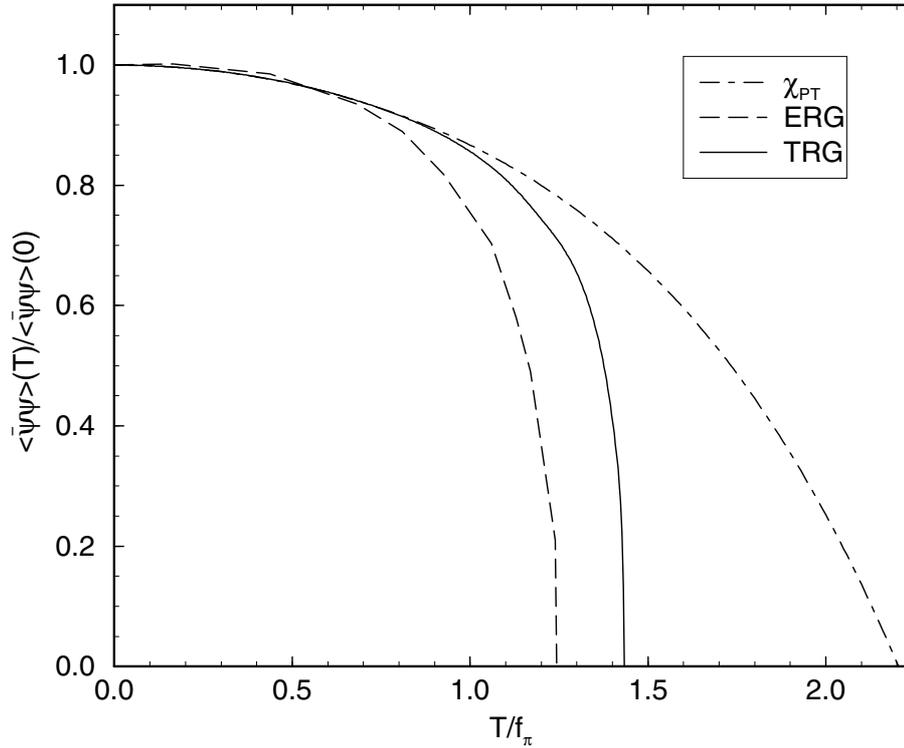


Abbildung 4.15: Die Temperaturabhängigkeit des chiralen Kondensats. Als Ordinate ist die Temperatur in Einheiten der  $(T = 0)$ -Pion-Zerfallskonstanten gewählt, das chirale Kondensat ist in Einheiten des  $(T = 0)$ -Wertes angegeben. Es sind die Ergebnisse der thermalen Renormierungsgruppe, der exakten Renormierungsgruppe nach [76] sowie der chiralen Störungstheorie nach Gl. 4.89 dargestellt.

## 4.6. Ausblick

Nachdem wir unsere Ergebnisse zum chiralen Phasenübergang dargelegt haben, wollen wir noch einen Ausblick wagen, wie weitere Forschungen mit dieser Methode aussehen könnten.

- Im vorhergehenden Abschnitt haben wir letztlich doch recht naiv ein klassisches Potenzial mit relativ starken Kopplungen zugrundegelegt, aber bereits damit sehr ermutigende Ergebnisse über das Temperaturverhalten der QCD erhalten. Nun wäre ein sorgfältiges Studium der Randbedingung notwendig um zu klären, ob die Ergebnisse durch höherdimensionale Operatoren in der Start-Wirkung stark verfälscht werden oder recht robust gegenüber den Randbedingungen sind. Falls die Resultate sensitiv auf höherdimensionale Operatoren in der Start-Wirkung sind, wäre die Frage zu klären, wie diese Randbedingungen bestimmt werden könnten.
- Wir haben bisher nur den chiralen Limes des Modells untersucht. Interessant wäre es nun noch Strom-Quark-Massen in das Modell einzubauen. Das kann durch einen Quellterm, der einen expliziten symmetriebrechenden Term darstellt, geschehen. Der Phasenübergang

wird damit zu einem kontinuierlichen Crossover. Damit wäre der Brückenschlag zu “realistischer” QCD möglich.

- Wir haben im Abschnitt 4.3 vermutet, dass die kritischen Exponenten noch durch weitere Terme der gleichen Ordnung in der Ableitungsentwicklung beeinflusst werden und so die Diskrepanz unserer Ergebnisse zu den Monte-Carlo-Resultaten zu erklären sei. Diese Frage sollte eingehender untersucht werden.
- Wir haben in unseren Rechnungen stets eine scharfe Cut-off-Funktion verwendet. Für die hier berechneten Größen traten keine Probleme mit Nichtanalytizitäten der Gleichungen auf. Trotzdem können die Ergebnisse durch die Cut-off-Funktion eine gewisse Schemenabhängigkeit erhalten. Zwar lässt sich beweisen, dass die exakte Flussgleichung für die effektive Wirkung keine Schemenabhängigkeit zeigt. Das gilt aber nicht mehr, wenn Trunkierungen vorgenommen werden. Die Schemenabhängigkeit tritt nicht für den Term niedrigster Ordnung in der Ableitungsentwicklung auf (bzw. ist sehr gering), also dem effektiven Potenzial, kann aber wesentlich für die Terme höherer Ordnung sein ([105], die Autoren haben den Beweis im Rahmen der exakten Renormierungsgruppe geführt). Eine systematische Untersuchung dieser Schemenabhängigkeit wäre insgesamt nicht nur für den hier diskutierten speziellen Renormierungsgruppen-Ansatz, sondern ganz allgemein von Interesse.
- Als letzten Punkt wollen wir die Berechnung der Imaginärteile der Selbstenergien und damit die Bestimmung der Plasmon-Dämpfungsraten nennen. Nachdem wir hier erfolgreich demonstrieren konnten, dass wir im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe in der Lage sind, den chiralen Phasenübergang zu studieren, kann nun damit begonnen werden. Die Möglichkeit solche Imaginärteile berechnen zu können hat ja gerade die Formulierung der Renormierungsgruppe in der Realzeit-Formulierung der Quantenfeldtheorie gegenüber der Matsubara-Formulierung so attraktiv gemacht.



## 5. ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel dieser Arbeit war die Bereitstellung einer nicht-perturbativen Methode für die thermale Quantenfeldtheorie skalarer und fermionischer Systeme. Störungstheorie ist aufgrund von massiven Infrarot-Divergenzen nicht in der Lage Systeme u.a. an Phasenübergängen zweiter Ordnung korrekt zu beschreiben. Um nicht-statische Größen im Sinne einer Linear-Response-Theorie untersuchen zu können, sollte der Formalismus in der Closed-Time-Path-Formulierung (CTP) der thermalen Quantenfeldtheorie erfolgen. Dazu wurde eine wilsonsche Renormierungsgruppen-Formulierung, die sogenannte thermale Renormierungsgruppe, auf Systeme mit Fermionen erweitert. Die so gewonnene exakte Renormierungsgruppen-Gleichung ist im Allgemeinen nicht lösbar. Die Etablierung eines geeigneten Approximationsschemas war damit notwendig. Dieses wurde am chiralen Quark-Meson-Modell entwickelt und getestet. Das kritische Verhalten des Modells wurde untersucht und mit bekannten Ergebnissen verglichen. Zuletzt wurde damit der chirale Phasenübergang von Zwei-Flavour-QCD im chiralen Limes untersucht.

Die Darstellung im Einzelnen:

In Kapitel 2 gaben wir eine Einführung in die Formulierung der thermalen Quantenfeldtheorie. Dabei konzentrierten wir uns auf den Realzeit-Formalismus, da dieser die Basis für unsere Arbeit bildet. Die Störungsentwicklung des erzeugenden Funktionals und die thermalen Propagatoren für die CTP-Kontur wurden abgeleitet. Es zeigte sich, dass für eine konsistente Störungsentwicklung thermale Geistfelder und damit Matrix-Propagatoren eingeführt werden müssen. Auf Tree-Niveau erhalten lediglich die Propagatoren thermale Korrekturen, während die anderen  $n$ -Punkt-Funktionen erst durch Loop-Effekte Korrekturen bekommen. Ebenso gibt es auf Tree-Niveau keine gemischten Vertizes zwischen Feldern und thermalen Geistfeldern, sie werden ebenfalls erst durch Loop-Effekte generiert. Eine weitere Eigenschaft, nämlich dass die thermalen Propagatoren additiv in einen ( $T = 0$ )- und einen thermalen Anteil separieren, erwies sich als wichtige Grundlage für die Formulierung der wilsonschen Renormierungsgruppe in Minkowski-Raumzeit.

Anschließend gaben wir eine kurze Darstellung der Grundproblematik bei der Beschreibung von Phasenübergängen zweiter Ordnung. Wir legten dar, dass das Divergieren der Korrelationslänge am Übergangspunkt für die Schwierigkeiten verantwortlich ist. Eine Erläuterung der wichtigsten Zusammenhänge von divergenter Korrelationslänge, Universalität, Skalenrelationen und dem Ansatz der wilsonschen Renormierungsgruppe wurde anhand eines Spinsystems gegeben. Der Zusammenhang des kritischen Verhaltens von Spinsystemen und der Quantenfeldtheorie wurde diskutiert.

In Kapitel 3 stellten wir die Anwendung der wilsonschen Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie vor. Wir gaben zunächst eine Darstellung der exakten Renormierungsgruppe. Diese liefert eine exakte Evolutionsgleichung für die effektive Mittelwert-Wirkung in euklidischer

Raumzeit, die Grundeigenschaften dieser Evolutionsgleichung wurden diskutiert. Diese Formulierung stellt auch die Grundidee für den in dieser Arbeit verwendeten Formalismus, allerdings mit einigen wesentlichen Unterschieden. Wir entwickelten aus dieser Idee die Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe, die nun aber die vorher erwähnte Eigenschaft ausnützt, dass die Propagatoren in einen ( $T = 0$ )- und einen thermalen Anteil zerfallen: Der Infrarot-Cut-off wirkt lediglich auf den thermalen Anteil der Propagatoren. Da die thermalen Moden On-Shell sind, ist deshalb nur eine dreidimensionale Cut-off-Funktion notwendig. Die thermale Renormierungsgruppe behandelt somit lediglich die thermischen Fluktuationen, die Quantenfluktuationen bleiben unberührt. Nur so ist überhaupt eine Formulierung in Minkowski-Raumzeit möglich. Die sich daraus ergebenden Unterschiede zur exakten Renormierungsgruppe u.a. in den Randbedingungen des Renormierungsgruppenflusses wurden eingehend diskutiert. Die Darstellung des Formalismus sowie die neue Erweiterung auf fermionische Systeme erfolgte dabei gleichzeitig. Der verwendete Superspur-Formalismus wurde in Anhang B erläutert, dort wurden auch die Details der Herleitung der exakten Renormierungsgruppen-Gleichung vorgeführt. Mit diesen Hilfsmitteln ausgerüstet leiteten wir die Flussgleichungen für die skalare Einpunkt-Funktion, die skalare Zwei-Punkt-Funktion, die fermionische Zwei-Punkt-Funktion sowie die gemischte Dreipunkt-Funktion modellunabhängig ab.

In Kapitel 4 stellten wir zuerst das Modell vor, das wir mittels des erarbeiteten Formalismus untersuchen wollten. Dieses chirale Quark-Meson-Modell stellt eine effektive Beschreibung von Zwei-Flavour-QCD im chiralen Limes mit vollständig gebrochener axialer  $U(1)_A$ -Symmetrie dar. Nun war zunächst die Etablierung eines geeigneten Approximationsschemas notwendig. Die thermale Renormierungsgruppe, wie wir sie bisher vorgestellt hatten, ist eine exakte Beschreibung, die aber ohne Näherungen nicht angewendet werden kann. Die Entwicklung dieses Approximationsschemas erfolgte nun anhand des chiralen Quark-Meson-Modells. Dazu gaben wir eine Ableitungsentwicklung für die effektive Mittelwert-Wirkung an und diskutierten ausführlich, bis zu welcher Ordnung diese Ableitungsentwicklung durchgeführt wurde. Damit konnte die Näherung der effektiven Mittelwert-Wirkung sowie deren Randbedingung bzgl. des Renormierungsgruppenflusses angegeben werden. Wir wollen nochmals anmerken, dass die Ableitungsentwicklung keine Entwicklung in einem kleinen Parameter – wie die Störungstheorie – darstellt und damit die exakte Flussgleichung *nicht* ihren nicht-perturbativen Charakter verliert. Die Konvergenz der Ableitungsentwicklung kann allerdings langsam sein – ein Problem, auf das wir in der numerischen Diskussion gestoßen waren, könnte evtl. so erklärt werden. Neben der Ableitungsentwicklung für die effektive Mittelwert-Wirkung benötigt man geeignete Näherungsschemas für die vollen Propagatoren. Ein Näherungsschema für den skalaren Propagator wurde bereits in der Literatur diskutiert, die Erweiterung auf die nächste Ordnung in der Ableitungsentwicklung war ohne Schwierigkeiten möglich. In dieser Näherung werden die Imaginärteile der skalaren Selbstenergie-Funktion im Sinne einer Quasiteilchen-Näherung vernachlässigt. Damit behält der volle Propagator seine thermale Struktur bei, der Beitrag zur Selbstenergie-Funktion kann durch eine Aufsummation einer Schwinger-Dyson-Gleichung berechnet werden. Der so erhaltene volle skalare Propagator ist vollständig konsistent, mit der hier gemachten Ableitungsentwicklung bis zur ersten Ordnung. Der volle Fermion-Propagator hingegen kann nicht vollständig aus der Ableitungsentwicklung gewonnen werden. Die führenden thermalen Effekte sind jenseits dieser Ableitungsentwicklung. Um dies zu sehen diskutierten wir den Fermion-Propagator in Ein-Loop

Störungstheorie in der sogenannten HTL-Approximation. Es ergibt sich eine komplizierte, nicht-lokale Struktur des Fermion-Propagators, die sich in nicht analytisch lösbaren Dispersionsrelationen der kollektiven Moden äußert. Das Verhalten dieser kollektiven Moden wurde eingehend beschrieben. Anschließend gaben wir eine Näherung an, in der der wichtigste Effekt dieser komplizierten nicht-lokalen Struktur in Form eines lokalen effektiven Massenterms in die Flussgleichungen implementiert werden kann. Dieser zusätzliche effektive Massenterm ist jedoch *chiral-invariant* und steht jenseits der Ableitungsentwicklung. In einer Renormierungsgruppen-Analyse eines fermionischen Systems wurde er in dieser Arbeit erstmals berücksichtigt. Allerdings führt seine Berücksichtigung in der exakten Renormierungsgruppe nur zu quantitativen Änderungen nicht-universeller Größen, während in der thermalen Renormierungsgruppe das Entkoppeln der Fermionen von der dreidimensionalen Physik an einem Phasenübergang zweiter Ordnung essenziell mit diesem Massenterm verknüpft ist. Dieser Zusammenhang wurde ausführlich dargelegt, der prinzipielle Unterschied des Entkoppelungsmechanismus in der Hochtemperaturentwicklung und an einem Phasenübergang zweiter Ordnung wurde explizit erläutert. Die Güte der Näherung des nicht-lokalen Propagators durch diesen lokalen effektiven Massenterm wurde eingehend in Abhängigkeit der  $(T = 0)$ -Kopplungen untersucht. Es zeigte sich, dass in dem von uns untersuchten Parameterbereich die Näherung Gültigkeit behält. Um diese Diskussion führen zu können musste aber zunächst ein System von Flussgleichungen für alle im Rahmen dieses Approximationsschemas vorkommenden Parameter abgeleitet werden. Die numerische Auswertung dieses Flussgleichungssystems wurde vorgestellt, eine intensive numerische Untersuchung des chiralen Quark-Meson-Modells schloß sich an. Dabei zeigte sich, dass die thermale Renormierungsgruppe das korrekte universelle Verhalten des Modells liefert: Das Modell zeigt, wie erwartet, einen Phasenübergang zweiter Ordnung und liegt in der Universalitätsklasse des  $O(4)$ -Modells. Das konnte explizit verifiziert werden, die kritischen Exponenten des Übergangs wurden bestimmt. In der Analyse dieses Übergangs im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe war bisher die skalare Wellenfunktionsrenormierung vernachlässigt worden. Da diese nun Berücksichtigung fand, konnten wir damit im Rahmen der TRG erstmals die anomale Dimension bestimmen. Die Ergebnisse wurden mit Resultaten der exakten Renormierungsgruppe, einer Sieben-Loop  $\epsilon$ -Entwicklung und einer Monte-Carlo-Simulation, welche als am zuverlässigsten angesehen wird, verglichen. Es zeigte sich, dass die anomale Dimension und der Exponent  $\gamma$  bereits gut, die anderen Exponenten nicht ganz zur vollen Zufriedenheit reproduziert wurden. Die Ursachen hierfür wurden diskutiert.

Als ein Beispiel für eine nicht-universelle Größe wurde die kritische Temperatur des Systems in Abhängigkeit der  $(T = 0)$ -Kopplungen untersucht, es ergab sich eine sinnvolle Übereinstimmung mit perturbativen Resultaten und, soweit sie zum Vergleich zur Verfügung standen, mit Ergebnissen der exakten Renormierungsgruppe.

Im Laufe der Arbeit wurde ausführlich die Problematik der  $(T = 0)$ -Start-Wirkung dargelegt und wir beschränkten uns deshalb auf den Bereich kleiner Kopplungen. Im letzten Teil der Arbeit sollten nun die Parameter der Start-Wirkung so gewählt werden, dass das Modell eine effektive Beschreibung für Zwei-Flavour-QCD im chiralen Limes ergibt. Damit begaben wir uns in einen Parameterbereich, den wir vorher als äußerst problematisch erklärten. Der Vergleich der kritischen Temperatur mit Resultaten der Gitter-QCD und der exakten Renormierungsgruppe zeigte aber trotzdem bereits sehr gute Übereinstimmung mit dem Gitter-Wert, der sogar besser

reproduziert wurde als von der exakten Renormierungsgruppe. Ein Vergleich der Temperaturabhängigkeit des chiralen Kondensats mit dem Ergebnis der Drei-Loop chiralen Störungstheorie und der exakten Renormierungsgruppe zeigte, dass das Tieftemperaturverhalten unserer Berechnung identisch mit dem Ergebnis der chiralen Störungstheorie ist, wohingegen die exakte Renormierungsgruppe bereits hier geringe Abweichungen zeigt. Eine Abweichungen von der chiralen Störungstheorie in diesem Limes halten wir für unplausibel, im Limes  $T \rightarrow 0$  sollte die in der chiralen Störungstheorie gemachte Vernachlässigung von Meson-Loops keinen Unterschied machen. Deshalb halten wir unser Ergebnis in diesem Bereich sogar für zuverlässiger als das Ergebnis der exakten Renormierungsgruppe. Inwieweit diese "naive" Anwendung auf QCD eher zufällig so gute Resultate liefert bzw. wie robust die Ergebnisse gegenüber höherdimensionalen Operatoren in der Start-Wirkung sind, bleibt allerdings offen. Damit sind wir bereits beim Ausblick. Nachdem die Wirksamkeit der entwickelten Methode unter Beweis gestellt wurde und bereits interessante Ergebnisse in der Anwendung auf das chirale Quark-Meson-Modell gegeben werden konnten, bieten sich einige weitergehende interessante Fragen an: Offen geblieben ist, welcher Effekt tatsächlich für die Abweichungen der kritischen Exponenten verantwortlich ist. Es können entweder Operatoren höherer Ordnungen in der Ableitungsentwicklung, oder ein Term der berechneten Ordnung aber mit einer anderen Struktur, der hier vernachlässigt wurde, sein. Des Weiteren sollte die Schemenabhängigkeit durch die Cut-off-Funktion untersucht werden. Das wäre für Anwendungen der wilsonschen Renormierungsgruppe ganz allgemein von Interesse. Des Weiteren bietet sich nun eine Berechnung der Plasmon-Dämpfungsrate an.

In den Anhängen A wurden alle Flussgleichungen übersichtlich zusammengestellt, im Anhang B wurde der verwendete Superspur-Formalismus vorgestellt.

In Anhang C wurde ein interessanter Seitenaspekt beleuchtet, der nicht auf die hier verwendete thermale Renormierungsgruppe zurückgeht. So lässt eine Anwendung von Renormierungsgruppen-Argumenten einige wichtige Schlussfolgerungen in einem Modell der dynamischen elektroschwachen Symmetriebrechung zu, dem sogenannten Top-Kondensations-Modell. Die Renormierungsgruppen-Formulierung dieses Modells wurde eingehend untersucht, das in dieser Formulierung notwendige Laufen des Massenparameters wurde ausführlich erklärt und in den Zusammenhang zur exakten Renormierungsgruppe gestellt. Eine allgemeine Diskussion über das Auftreten höherdimensionaler Operatoren wurde in diesem Formalismus durchgeführt. Damit konnten wir ein Kriterium für die Frage, wann Top-Kondensations-Modelle Reparametrisierungen des Standardmodells darstellen, geben. Für beide Fälle wurde ein Beispiel erläutert. Der zweite Fall, Top-Kondensation durch schweren Eichboson-Austausch, führte uns auf die Frage nach leichten vektorialen Bindungszuständen im Niederenergie-Spektrum, die nach diesen Argumenten nicht auftreten können.

Diese Arbeit hat gezeigt, dass die Anwendung der wilsonschen Renormierungsgruppe in der Quantenfeldtheorie einen intuitiven und überaus wirkungsvollen nicht-perturbativen Zugang bietet. Die spezielle Formulierung der thermalen Renormierungsgruppe ermöglicht es darüberhinaus nicht-statische Größen im Sinne einer Linear-Response-Theorie zu berechnen. Wir hoffen damit die Grundlage für viele interessante Anwendungen zu geben.

## A. DIE THERMALEN FLUSSGLEICHUNGEN

Wir geben die Flussgleichungen hier nochmals in kompakter Form an. Dieser Teil ist auch als Formelsammlung für weitere Arbeiten auf diesem Gebiet gedacht und enthält auch Formeln, die wir berechnet haben, die aber nicht angewendet wurden. So haben wir bei der Berechnung der Gleichungen teilweise bereits eine unterschiedliche Wellenfunktionsrenormierung für die Zeit- und die Raumkomponenten der Impulse verwendet, d.h. den zusätzlichen Term  $Z_{0,\Lambda}(u \cdot p)^2$  in den inversen skalaren Propagator eingeführt. Das liefert dann mit  $\tilde{Z}_\Lambda = Z_\Lambda + Z_{0,\Lambda}$  die hier angegebenen Flussgleichungen. Die Flussgleichungen, die in den Rechnungen Verwendung fanden, erhält man natürlich für den Fall  $Z_{0,\Lambda} = 0$ , also  $\tilde{Z}_\Lambda = Z_\Lambda$ .

### A.1. Die dimensionsbehafteten Flussgleichungen

Die Flussgleichungen für das Potenzial und dessen erste und zweite Ableitung lauten:

$$\Lambda \partial_\Lambda U(\rho) = -\frac{\Lambda^3 T}{2\pi^2} \left[ \ln [1 - \exp(-\beta \omega_b^\sigma)] \theta(\omega_b^{\sigma^2}) + 3 \ln [1 - \exp(-\beta \omega_b^\pi)] \theta(\omega_b^{\pi^2}) - 8 N_c \ln [1 + \exp(-\beta \omega_f)] \right] \quad (\text{A.1})$$

$$\Lambda \partial_\Lambda U'(\rho) = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \left[ \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\sigma} (2\rho U^{(3)} + 3U^{(2)}) + 3 \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\pi} U^{(2)} + 4 N_c h^2 \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\omega_f} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda U^{(2)}(\rho) = & -\frac{\Lambda^3}{8\pi^2} \left[ \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^\sigma} \left[ 2\tilde{Z}_\Lambda (2\rho U^{(4)} + 5U^{(3)}) \right. \right. \\ & \left. \left. - (2\rho U^{(3)} + 3U^{(2)})^2 \left\{ (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma)) \frac{\beta}{\omega_b^\sigma} + \frac{1}{\omega_b^{\sigma^2}} \right\} \right] \right. \\ & + 3 \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^\pi} \left[ 2\tilde{Z}_\Lambda U^{(3)} - (U^{(2)})^2 \left\{ (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) \frac{\beta}{\omega_b^\pi} + \frac{1}{\omega_b^{\pi^2}} \right\} \right] \\ & \left. - 2 N_c h^4 \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\omega_f} \left\{ (1 - N_{\text{FD}}(\omega_f)) \frac{\beta}{\omega_f} + \frac{1}{\omega_f^2} \right\} \right], \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

mit den Definitionen

$$\langle \Phi \rangle = \sigma_0 \mathbf{1} , \quad \rho_0 = \langle \rho \rangle = \frac{\langle \sigma \rangle^2}{2} = 2\sigma_0^2 , \quad (\text{A.4})$$

$$\rho = \frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{2} , \quad M_\sigma^2 = 2\rho U^{(2)} + U' , \quad M_\pi^2 = U' , \quad m_\chi^2 = \frac{h^2}{2}\rho , \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{Z_\Lambda \Lambda^2 + M^2}{\tilde{Z}_\Lambda}} , \quad \omega_f = \sqrt{\Lambda^2 + (m_\chi^2 + 2m_T^2)} , \quad (\text{A.6})$$

$$N_{\text{BE}}(\omega_b) = \frac{1}{\exp(\beta\omega_b) - 1} , \quad N_{\text{FD}}(\omega_f) = \frac{1}{\exp(\beta\omega_f) + 1} \quad (\text{A.7})$$

Die Flussgleichungen für die Wellenfunktionsrenormierung wurde am Pionfeld definiert und berechnet. Die anomale Dimension ist als Ableitung des Logarithmus der Wellenfunktionsrenormierung definiert

$$\eta = -\Lambda \partial_\Lambda \ln(Z_\Lambda) . \quad (\text{A.8})$$

Die Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung lautet

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda Z_\Lambda &= -\frac{\sqrt{Z_\Lambda}^3 \Lambda^5 \rho (U''(\rho))^2}{12\pi^2} \left( F(\omega_\sigma, \omega_\pi) + F(\omega_\pi, \omega_\sigma) \right) \Big|_{\rho=\rho_0} \\ &- \frac{N_c \Lambda^5 h^2}{12\pi^2 \omega_f^7} \left\{ \left[ 6 \frac{\omega_f^4}{\Lambda^2} - 3\omega_f^2 - 9 \frac{m_T^2 \omega_f^2}{\Lambda^2} + 10m_T^2 \right] \right. \\ &\quad \left( -N_{\text{FD}}(\omega_f) + \beta\omega_f N_{\text{FD}}(\omega_f)(N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) \right) \\ &\quad + \left[ \omega_f^2 + 3 \frac{\omega_f^2 m_T^2}{\Lambda^2} - 4m_T^2 \right] \beta^2 \omega_f^2 N_{\text{FD}}(\omega_f) (N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) (2N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} m_T^2 \beta^3 \omega_f^3 N_{\text{FD}}(\omega_f) (N_{\text{FD}}(\omega_f) - 1) (6N_{\text{FD}}(\omega_f)^2 - 6N_{\text{FD}}(\omega_f) + 1) \right\} , \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F(\omega_\sigma, \omega_\pi) = & \frac{1}{\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^5} (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_b^{\pi^2})^3} \left\{ N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2}) \left( 6 \frac{\omega_b^{\pi^7}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 8 \omega_b^{\pi^5} - 6 \frac{\omega_b^{\sigma^2} \omega_b^{\pi^5}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right) \right. \\
& + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) \left( 3 \omega_b^{\sigma^5} - 3 \frac{\omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^2}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 10 \omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^2} + 12 \frac{\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^4}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right. \\
& \quad \left. \left. + 15 \omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^4} - 9 \frac{\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^6}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right) \right. \\
& - \frac{\beta}{\sqrt{Z_\Lambda}} N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) \\
& \quad \left( 3 \frac{\omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^3}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 3 \omega_b^{\sigma^5} \omega_b^\pi + 10 \omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^3} - 6 \frac{\omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^5}}{Z_\Lambda \Lambda^2} + 3 \frac{\omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^7}}{Z_\Lambda \Lambda^2} - 7 \omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^5} \right) \\
& + \frac{\beta^2}{Z_\Lambda} N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2}) (1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) (1 + 2 N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) \\
& \quad \left. \left( \omega_b^{\sigma^5} \omega_b^{\pi^2} - 2 \omega_b^{\sigma^3} \omega_b^{\pi^4} + \omega_b^\sigma \omega_b^{\pi^6} \right) \right\} \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Die Flussgleichung für die effektive thermale chiral-invariante Fermionmasse:

$$\Lambda \partial_\Lambda m_T^2 = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} h^2 \left[ \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^0) \theta(\omega_b^{0^2})}{\omega_b^0} + \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f^0)}{\omega_f^0} \right] \tag{A.11}$$

Die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplungen wurde sowohl mit dem Sigma als auch mit dem Pion als äußerem Teilchen berechnet. Für das Sigma lautet sie:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda h &= \frac{\Lambda^3}{8\pi^2} \left[ -(U''' \sigma^3 + 3U'' \sigma) h^2 \left\{ \frac{-2m N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})^2} + \frac{m N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^{\sigma^2} (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_f^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[ -\beta(1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma)) - \frac{3\omega_b^{\sigma^2} - \omega_f^2}{\omega_b^\sigma (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_f^2)} \right] \right\} \right. \\
&\quad + 3(U'' \sigma) h^2 \left\{ \frac{-2m N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})^2} + \frac{m N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^{\pi^2} (\omega_b^{\pi^2} - \omega_f^2)} \right. \\
&\quad \left. \left. \left[ -\beta(1 + N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi)) - \frac{3\omega_b^{\pi^2} - \omega_f^2}{\omega_b^\pi (\omega_b^{\pi^2} - \omega_f^2)} \right] \right\} \right. \\
&\quad - h^3 \left\{ \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_f^2 (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})} \left[ m^2 \beta(1 - N_{\text{FD}}(\omega_f)) - \omega_f \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m^2(3\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})}{\omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\sigma} \frac{\omega_b^{\sigma^2} - \Lambda^2 + m^2}{(\omega_b^{\sigma^2} - \omega_f^2)^2} \right\} \\
&\quad + 3h^3 \left\{ \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_f^2 (\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})} \left[ m^2 \beta(1 - N_{\text{FD}}(\omega_f)) - \omega_f \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m^2(3\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})}{\omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\pi} \frac{\omega_b^{\pi^2} - \Lambda^2 + m^2}{(\omega_b^{\pi^2} - \omega_f^2)^2} \right\} \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Für das Pion lautet sie:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda h &= \frac{\Lambda^3}{8\pi^2} \left[ -U'' \sigma h^2 \left\{ \frac{-4m N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2}) (\omega_f^2 - \omega_\pi^2)} \right. \right. \\
&\quad + \frac{4m N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^\pi (\omega_b^{\pi^2} - \omega_b^{\sigma^2}) (\omega_b^{\pi^2} - \omega_f^2)} \\
&\quad \left. \left. + \frac{4m N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda^2 \omega_b^\sigma (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_b^{\pi^2}) (\omega_b^{\sigma^2} - \omega_f^2)} \right\} \right. \\
&\quad - h^3 \left\{ \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})} + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\sigma) \theta(\omega_b^{\sigma^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\sigma (\omega_f^2 - \omega_b^{\sigma^2})} \right\} \\
&\quad \left. - h^3 \left\{ \frac{N_{\text{FD}}(\omega_f)}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_f (\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})} + \frac{N_{\text{BE}}(\omega_b^\pi) \theta(\omega_b^{\pi^2})}{\tilde{Z}_\Lambda \omega_b^\pi (\omega_f^2 - \omega_b^{\pi^2})} \right\} \right] \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

## A.2. Die dimensionslosen Flussgleichungen

Die dimensionslosen, renormierten bzw. dimensionslosen und renormierten Größen sind wie folgt definiert. Die dimensionslosen Größen lauten:

$$\kappa = \frac{\rho}{\Lambda T} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{\sigma^2 + \pi^2}{2} \quad (\text{A.14})$$

$$u(\kappa) = \frac{U(\rho)}{\Lambda^3 T} = \frac{U(\Lambda T \kappa)}{\Lambda^3 T} \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{h} = h \quad (\text{A.16})$$

$$\lambda = \frac{\Lambda}{T} \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b) = \frac{1}{\exp(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b) - 1} \quad \hat{N}_{\text{FD}}(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_f) = \frac{1}{\exp(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_f) + 1} \quad (\text{A.18})$$

$$\zeta = \frac{Z_\Lambda}{\tilde{Z}_\Lambda} \quad (\text{A.19})$$

Die renormierten Größen:

$$\phi_r = \sqrt{Z_\Lambda} \phi \quad (\text{A.20})$$

und damit

$$\rho_r = Z_\Lambda \rho \quad (\text{A.21})$$

$$h_r = \frac{h}{\sqrt{Z_\Lambda}} \quad (\text{A.22})$$

Schließlich ergeben sich damit die Definitionen für die dimensionslosen u. renormierten Größen:

$$\kappa_r = Z_\Lambda \kappa \quad (\text{A.23})$$

$$u_r(\kappa_r) = u\left(\frac{\kappa_r}{Z_\Lambda}\right) \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{h}_r = \sqrt{\frac{\hat{h}}{Z_\Lambda}} \quad (\text{A.25})$$

Dadurch ergeben sich die dimensionslosen und renormierten Teilchen-Pole:

$$\hat{\omega}_b^\sigma = \sqrt{(1 + u'_r + 2\kappa_r u''_r)}, \quad \hat{\omega}_b^\pi = \sqrt{(1 + u'_r)} \quad \text{und} \quad \hat{\omega}_f = \sqrt{1 + \frac{\kappa_r}{2\lambda} \hat{h}_r^2 + 2\frac{\hat{m}_T^2}{\lambda^2}} \quad (\text{A.26})$$

Damit lassen sich die Flussgleichungen durch die dimensionslosen und renormierten Größen ausdrücken. Für das Potenzial und dessen Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda u_r &= -3u_r + \kappa_r u'_r (1 + \eta) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln \left( 1 - \exp \left[ -\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma \right] \right) \theta(\hat{\omega}_b^{\sigma 2}) \right. \\ &\quad \left. + 3 \ln \left( 1 - \exp \left[ -\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi \right] \right) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) \right] \\ &\quad + \frac{4N_c}{\pi^2} \ln(1 + \exp[-\lambda \hat{\omega}_f]) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda u'_r &= -(2 - \eta)u'_r + \kappa_r u''_r (1 + \eta) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\zeta} \lambda}{4\pi^2} \left[ (2\kappa_r u'''_r + 3u''_r) \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\hat{\omega}_b^\sigma} + 3u''_r \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\hat{\omega}_b^\pi} \right] \\ &\quad - \frac{N_c \lambda}{\pi^2} \hat{h}_r^2 \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda u''_r &= (2\eta - 1)u''_r + \kappa_r u'''_r (1 + \eta) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\zeta} \lambda}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\hat{\omega}_b^\sigma} \right. \\ &\quad \left. \left\{ (5u'''_r + 2\kappa_r u''''_r) - (3u''_r + 2\kappa_r u'''_r)^2 \left( \frac{\sqrt{\zeta} \lambda}{2\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 1 + \hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\hat{\omega}_b^\pi} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 3u'''_r - 3(u''_r)^2 \left( \frac{\sqrt{\zeta} \lambda}{2\hat{\omega}_b^\pi} \left( 1 + \hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right) \right\} \right] \\ &\quad + \frac{N_c \lambda}{4\pi^2} \hat{h}_r^4 \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f^2} \left[ \lambda \left( 1 - \hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f) \right) + \frac{1}{\hat{\omega}_f} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda u_r^{(3)} &= 3\eta u_r^{(3)} + (1 + \eta)\kappa_r u_r^{(4)} \\
&- \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma)\theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\hat{\omega}_b^\sigma} \right. \\
&\quad \left\{ - (3u_r^{(2)} + 2\kappa_r u_r^{(3)}) \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \right) \right. \\
&\quad \left[ (5u_r^{(3)} + 2\kappa_r u_r^{(4)}) - (3u_r^{(2)} + 2\kappa_r u_r^{(3)})^2 \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[ (7u_r^{(4)} + 2\kappa_r u_r^{(5)}) - 2(3u_r^{(2)} + 2\kappa_r u_r^{(3)})(5u_r^{(3)} + 2\kappa_r u_r^{(4)}) \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[ (3u_r^{(2)} + 2\kappa_r u_r^{(3)})^3 \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} + \frac{\zeta\lambda^2}{2}\hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\sigma) \right) \right) \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi)\theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\hat{\omega}_b^\pi} \\
&\quad \left\{ -u_r^{(2)} \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\pi} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right) \right. \\
&\quad \left[ 3u_r^{(3)} - 3(u_r^{(2)})^2 \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\pi} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right) \right] \\
&\quad + \left[ 3u_r^{(4)} - 6u_r^{(2)}u_r^{(3)} \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\pi} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right) \right] \\
&\quad + \left[ 3(u_r^{(2)})^3 \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \left( \frac{\sqrt{\zeta}\lambda}{2\hat{\omega}_b^\pi} \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \right) + \frac{1}{2(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\zeta\lambda^2}{2}\hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \left( 1 + \hat{N}_{\text{BE}}(\sqrt{\zeta}\lambda\hat{\omega}_b^\pi) \right) \right) \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{N_c\lambda}{16\pi^2} \hat{h}_r^6 \frac{\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f)}{(\hat{\omega}_f)^3} \left[ \lambda^2 \left( \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1 \right) - 2\lambda^2 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) \left( \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\lambda}{\hat{\omega}_f} \left( \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda\hat{\omega}_f) - 1 \right) - \frac{3}{(\hat{\omega}_f)^2} \right] \tag{A.30}
\end{aligned}$$

Für das Minimum des Potentials:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_{\Lambda} \kappa_{r,0} &= [-\kappa_{r,0}(1 + \eta) \\ &+ \frac{\sqrt{\zeta} \lambda}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\hat{\omega}_b^\sigma} \left( 2\kappa_r^0 \frac{u_r'''}{u_r''} + 3 \right) + 3 \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\hat{\omega}_b^\pi} \right] \\ &+ \frac{N_c \lambda \hat{h}_r^2}{\pi^2} \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{u_r'' \hat{\omega}_f} \Big]_{\kappa_{r,0}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Die dimensionslose Gleichung für die anomale Dimension lautet:

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda \frac{\kappa_r (u_r^{(2)})^2}{12\pi^2} \left( F(\hat{\omega}_b^\sigma, \hat{\omega}_b^\pi) + F(\hat{\omega}_b^\pi, \hat{\omega}_b^\sigma) \right) \Big|_{\kappa_r = \kappa_{r,0}} \\ &+ N_c \frac{\hat{h}_r^2}{12\pi^2 \hat{\omega}_f^7} \left\{ \left[ 6\hat{\omega}_f^4 - 3\hat{\omega}_f^2 - 9\mu_T^2 \hat{\omega}_f^2 + 10\mu_T^2 \right] \right. \\ &\quad \left( -\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) + \lambda \hat{\omega}_f \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) - 1) \right) \\ &\quad + \left[ \hat{\omega}_f^2 + 3\hat{\omega}_f^2 \mu_T^2 - 4\mu_T^2 \right] \lambda^2 \hat{\omega}_f^2 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) - 1) (2\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) - 1) \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \mu_T^2 \lambda^3 \hat{\omega}_f^3 \hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) (\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) - 1) (6\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f)^2 - 6\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f) + 1) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

mit

$$\begin{aligned} F(\hat{\omega}_b^\sigma, \hat{\omega}_b^\pi) &= \frac{1}{\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^5 ((\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - (\hat{\omega}_b^\pi)^2)^3} \\ &\left\{ \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2) (6(\hat{\omega}_b^\pi)^7 - 8(\hat{\omega}_b^\pi)^5 - 6(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 (\hat{\omega}_b^\pi)^5) \right. \\ &+ \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 - 10(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 + 12(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^4 \\ &\quad + 15\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^4 - 9\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^6) \\ &- \lambda \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) + 1) (3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^3 - 3(\hat{\omega}_b^\sigma)^5 \hat{\omega}_b^\pi \\ &\quad + 10(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^3 - 6(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^5 + 3\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^7 - 7\hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^5) \\ &+ \lambda^2 \hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2) (\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) + 1) (2\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^\pi) + 1) ((\hat{\omega}_b^\sigma)^5 (\hat{\omega}_b^\pi)^2 \\ &\quad \left. - 2(\hat{\omega}_b^\sigma)^3 (\hat{\omega}_b^\pi)^4 + \hat{\omega}_b^\sigma (\hat{\omega}_b^\pi)^6) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die dimensionslose Yukawa-Kopplung am Sigmafeld wird zu:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \hat{h}_r &= -\frac{1}{2}(1 - \eta) \hat{h}_r \\
&- \frac{\zeta^2 \lambda}{8\pi^2} \hat{h}_r^3 \left[ (2\kappa_r^2 u_r''' + 3\kappa_r u_r'') \left\{ \frac{-2\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2)^2} + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2(\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - \hat{\omega}_f^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[ -\lambda(1 + \hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma)) - \frac{3\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - \hat{\omega}_f^2}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\sigma (\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - \hat{\omega}_f^2)} \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. - 3\kappa_r u_r'' \left\{ \frac{-2\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2)^2} + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2(\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2 - \hat{\omega}_f^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[ -\lambda(1 + \hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi)) - \frac{3\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2 - \hat{\omega}_f^2}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\pi (\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2 - \hat{\omega}_f^2)} \right] \right\} \right] \\
&- \frac{\zeta \lambda}{8\pi^2} \hat{h}_r^3 \left\{ \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f^2(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2)} \left[ \kappa_r \frac{\hat{h}_r^2}{2} \lambda(1 - \hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)) - \hat{\omega}_f \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\kappa_r \hat{h}_r^2 (3\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{2\hat{\omega}_f(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\sigma} \frac{\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - \left(1 + \kappa_r \frac{\hat{h}_r^2}{2}\right)}{(\zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2 - \hat{\omega}_f^2)^2} \right\} \\
&+ 3 \frac{\zeta \lambda}{8\pi^2} \hat{h}_r^3 \left\{ \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f^2(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2)} \left[ \kappa_r \frac{\hat{h}_r^2}{2} \lambda(1 - \hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)) - \hat{\omega}_f \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\kappa_r \hat{h}_r^2 (3\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{2\hat{\omega}_f(\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\pi} \frac{\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2 - \left(1 + \kappa_r \frac{\hat{h}_r^2}{2}\right)}{(\zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2 - \hat{\omega}_f^2)^2} \right\} \tag{A.34}
\end{aligned}$$

Die Yukawa-Kopplung am Pionfeld schreibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \hat{h}_r &= \frac{\eta}{2} \hat{h}_r \\
&+ \frac{\zeta}{8\pi^2} \hat{h}_r^3 \left[ \frac{\hat{N}_f(\lambda \hat{\omega}_f)}{\hat{\omega}_f} \left( \frac{1}{\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} - \frac{3}{\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right) \right. \\
&\quad + \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\sigma) \theta((\hat{\omega}_b^\sigma)^2)}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\sigma} \frac{1}{\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\sigma)^2} \\
&\quad \left. - \frac{\hat{N}_b(\sqrt{\zeta} \lambda \hat{\omega}_b^\pi) \theta((\hat{\omega}_b^\pi)^2)}{\sqrt{\zeta} \hat{\omega}_b^\pi} \frac{3}{\hat{\omega}_f^2 - \zeta(\hat{\omega}_b^\pi)^2} \right] \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

Wir benützen die Yukawa-Kopplung definiert am Pionfeld und werten die Gleichungen bei  $\rho = 0$  aus. Dies gilt auch für die thermale Fermionmasse. Damit erhält man dann

$$\Lambda \partial_\Lambda \hat{h}_r = \frac{\eta}{2} \hat{h}_r - \frac{\hat{h}_r^3}{4\pi^2} \left[ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} + \frac{\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f^0)}{\hat{\omega}_f^0} \right] \frac{1}{(\hat{\omega}_f^0)^2 - (\hat{\omega}_b^0)^2}, \quad (\text{A.36})$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \hat{m}_T^2 = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \hat{h}_r^2 \left[ \frac{\hat{N}_{\text{BE}}(\lambda \hat{\omega}_b^0) \theta((\hat{\omega}_b^0)^2)}{\hat{\omega}_b^0} + \frac{\hat{N}_{\text{FD}}(\lambda \hat{\omega}_f^0)}{\hat{\omega}_f^0} \right]. \quad (\text{A.37})$$

## B. EIGENSCHAFTEN DER SUPERSPUR

Um Renormierungsgruppen-Gleichungen, die bosonische und fermionische Freiheitsgrade enthalten, kompakt schreiben und die Antivertauschungsrelationen von Grassmann-Variablen effizient verarbeiten zu können, hat sich der sog. Superspurformalismus bewährt. Dabei fasst man die Felder und Quellen zu Superfeldern und Superquellen zusammen

$$\begin{aligned}\Phi &= (\phi, \psi, \bar{\psi}) ; \quad \bar{\Phi} = (\phi, -\bar{\psi}, \psi) \\ I &= (j, \eta, \bar{\eta}) ; \quad \bar{I} = (j, -\bar{\eta}, \eta) .\end{aligned}\tag{B.1}$$

Die Superfelder lassen sich damit als Funktional-Ableitungen nach Superquellen darstellen und umgekehrt

$$\begin{aligned}\frac{\delta W}{\delta I} &= \left( \frac{\delta W}{\delta j}, \frac{\delta W}{\delta \eta}, \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \right) = (\phi, -\bar{\psi}, \psi) = \bar{\Phi} \\ \frac{\delta W}{\delta \bar{I}} &= \left( \frac{\delta W}{\delta j}, -\frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) = (\phi, -\psi, -\bar{\psi}) = \mathcal{M}\Phi \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi} &= \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}, \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi}, \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} \right) = (-j, \bar{\eta}, -\eta) = -\bar{I} \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}} &= \left( \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}, -\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}}, \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \right) = (-j, \eta, \bar{\eta}) = -\mathcal{M}I\end{aligned}\tag{B.2}$$

mit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} .\tag{B.3}$$

Die modifizierte Legendre-Transformation ist dann gegeben als

$$\Gamma = W - (j\phi - \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) - \frac{1}{2}\phi D^{-1}\phi - \bar{\psi}S^{-1}\psi = W - I\bar{\Phi} - \frac{1}{2}\text{STr}(\bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}^{-1} \cdot \Phi)\tag{B.4}$$

mit der inversen, nackten Propagatormatrix

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} & & \\ & S^{-1} & \\ & & (S^{-1})^T \end{pmatrix} .\tag{B.5}$$

Die Superspur wird durch die Gleichung

$$\text{STr}(\mathcal{S}) = \text{Tr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}) \quad (\text{B.6})$$

definiert. Eine Supermatrix definiert sich nun als zweifache Funktional-Ableitung nach einer Superquelle bzw. einem Superfeld

$$\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{I} \delta I} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 W}{\delta j \delta j} & \frac{\delta^2 W}{\delta j \delta \eta} & \frac{\delta^2 W}{\delta j \delta \bar{\eta}} \\ -\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta} \delta j} & -\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta} \delta \eta} & -\frac{\delta^2 W}{\delta \bar{\eta} \delta \bar{\eta}} \\ \frac{\delta^2 W}{\delta \eta \delta j} & \frac{\delta^2 W}{\delta \eta \delta \eta} & \frac{\delta^2 W}{\delta \eta \delta \bar{\eta}} \end{pmatrix}; \quad \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \phi} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi \delta \bar{\psi}} \\ -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi} \delta \phi} & -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} & -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi} \delta \bar{\psi}} \\ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \phi} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Zwischen diesen Matrizen besteht der Zusammenhang (siehe z.B. [106])

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\delta^2 W}{\delta \bar{I} \delta I} \left[ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}^{-1} \right] = -(2\pi)^4 \delta(p) \mathbf{1}. \quad (\text{B.8})$$

Weiteres Differenzieren einer Supermatrix nach einer bosonischen Variablen ergibt wieder eine Supermatrix, wohingegen das Differenzieren nach einer Grassmann-Variablen keine Supermatrix ergibt. Wenn  $\mathcal{S}^+$  eine Supermatrix mit der Struktur

$$\mathcal{S}^+ = \begin{pmatrix} g & u & u \\ u & g & g \\ u & g & g \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

ist, ergibt die Ableitung nach einer Grassmann-Variablen eine ‘‘Anti’’-Supermatrix  $\mathcal{S}^-$  mit der Struktur

$$\mathcal{S}^- = \begin{pmatrix} u & g & g \\ g & u & u \\ g & u & u \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

wobei symbolisch  $g$  für eine gerade Anzahl und  $u$  für eine ungerade Anzahl von Ableitungen nach Grassmann-Variablen steht. Bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}^+$  und  $\mathcal{S}^-$  die Mengen aller Super- bzw. ‘‘Anti’’-Supermatrizen, können wir folgende Regeln aufstellen. Für das Produkt zweier solcher Matrizen gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{S}^+ &\in \mathcal{S}^+ \\ \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{S}^- &\in \mathcal{S}^+ \\ \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{S}^- &\in \mathcal{S}^- \\ \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{S}^+ &\in \mathcal{S}^- \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

für je zwei beliebige Matrizen  $\mathcal{S}^+ \in \mathcal{S}^+$  und  $\mathcal{S}^- \in \mathcal{S}^-$ . In der Superspur gelten für je zwei beliebige Matrizen  $\mathcal{S}_i^+ \in \mathcal{S}^+$ ,  $\mathcal{S}_j^- \in \mathcal{S}^-$  und eine beliebige Grassmann-Variablen  $\theta$

$$\begin{aligned}
\text{STr}(\mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{S}_2^+) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{S}_1^+) \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{S}_2^-) &= -\text{STr}(\mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{S}_1^-) \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{S}_2^-) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{M}) = \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^+) \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{S}_2^+) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{M}) = \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^-) \\
\text{STr}(\theta \cdot \mathcal{S}^+) &= \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \theta) \\
\text{STr}(\theta \cdot \mathcal{S}^-) &= -\text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{M} \cdot \theta).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Damit können wir unsere thermale Renormierungsgruppen-Gleichung ableiten, zunächst ergibt sich die Flussgleichung für das erzeugende Funktional

$$Z_\Lambda[I] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[ i \text{STr} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \cdot \Phi + I \cdot \bar{\Phi} + S_{\text{int}} \right\} \right] \tag{B.13}$$

durch Ableiten beider Seiten nach der Skala  $\Lambda$ . Anschließend drücken wir die Felder durch Funktional-Ableitungen nach den Quellen aus. Man kann dann die Ableitungsterme aus dem Pfadintegral herausziehen und erhält:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda Z_\Lambda[I] &= \frac{i}{2} \int \mathcal{D}\Phi \text{STr} \left\{ \bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \cdot \Phi \right\} \exp \left[ i \text{STr} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\Phi} \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \Phi + I \bar{\Phi} + S_{\text{int}} \right\} \right] \\
&= -\frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \frac{\delta}{\delta I} \left( \Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right) \mathcal{M} \frac{\delta}{\delta \bar{I}} \right\} Z_\Lambda[I].
\end{aligned} \tag{B.14}$$

In diese Gleichung kann nun das erzeugende Funktional für die zusammenhängenden greenschen Funktionen

$$Z_\Lambda[I] = e^{iW_\Lambda[I]} \tag{B.15}$$

eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda W_\Lambda[I] &= -\frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \left( \Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right) \frac{\delta^2 W_\Lambda[I]}{\delta \bar{I} \delta I} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \frac{\delta W_\Lambda[I]}{\delta I} \left( \Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right) \mathcal{M} \frac{\delta W_\Lambda[I]}{\delta \bar{I}} \right\}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Aus der Definition der Legendre-Transformation Gl. B.4 erhalten wir zusammen mit Gl. B.8 dann unsere Master-Gleichung

$$\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\Phi] = \frac{i}{2} \text{STr} \left\{ \left( \Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right) \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \right\}. \tag{B.17}$$

Um aus dieser Mastergleichung die Flussgleichungen für greensche Funktionen abzuleiten, müssen wir lediglich die Rechenregeln Gl. B.12 anwenden. Wir müssen dabei Terme der Art

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta \phi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} &= - \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \phi \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \\
\frac{\delta}{\delta \psi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} &= -\mathcal{M} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1} \mathcal{M} \frac{\delta^3 \bar{\Gamma}_\Lambda}{\delta \phi \delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \left( \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_\Lambda^{-1} \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

berechnen. Damit sind alle technischen Details, die man zur Berechnung der einzelnen Flussgleichungen braucht, gegeben.

## C. ANWENDUNG DER RENORMIERUNGSGRUPPE AUF TOP-QUARK KONDENSATION

Wir wollen in diesem Anhang zeigen, dass eine konsequente Anwendung von Renormierungsgruppen-Argumenten auch in Modellen der dynamischen elektroschwachen Symmetriebrechung einige interessante Fragen beantworten kann, die mit direkten dynamischen Methoden nur schwer zu beantworten sind [116]. Wir werden das am einfachsten Top-Quark Kondensations-Modell zeigen, obwohl dieses bereits experimentell ausgeschlossen ist, da die Argumentation so am transparentesten erscheint. Die Argumente gelten aber für die meisten Erweiterungen des einfachsten Modells ebenfalls. Eine Ausnahme bilden lediglich die supersymmetrischen Erweiterungen, die in gewisser Weise eine Sonderrolle spielen. Hier ist kein Zusammenhang zwischen der UV-Cut-off-Skala und der Skala, bei der die quadratischen Divergenzen abgeschnitten werden, erkennbar.

Wir erläutern zunächst die Renormierungsgruppen-Formulierung dieses Modells. In dieser Formulierung bezeichnet man es meist als BHL-Modell [112].

### C.1. Renormierungsgruppen-Formulierung

Das Top-Kondensations-Modell geht auf die Arbeiten von Nambu [109], Miransky, Yamawaki und Tanabashi [110, 111] sowie von Bardeen, Hill und Lindner [112] zurück. Es finden sich einige Übersichtsartikel, auf die wir für ein weiteres Studium verweisen wollen [113, 114]. Grundlage bildet ein Nambu–Jona-Lasinio Modell [107, 108], welches die Standardmodell-Quarks und -Leptonen sowie Eichwechselwirkungen der Eichgruppe  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  enthält. Darüber hinaus besitzt das Top-Quark eine zusätzliche attraktive Vier-Fermion-Wechselwirkung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + G \bar{\psi}_L t_R \bar{t}_R \psi_L . \quad (\text{C.1})$$

Dabei enthält  $\mathcal{L}_{\text{kin}}$  alle eichkinetischen Terme der Quarks, Leptonen und Eichbosonen,  $\psi_L = (t_L, b_L)$  ist das Quark Dublett der dritten Generation und  $t_R$  ist das rechtshändige Top-Quark. Das Modell enthält aber nicht den üblichen Higgs-Sektor, der die Massen der Teilchen generiert. Aufgrund der nicht-renormierbaren Struktur der zusätzlichen Vier-Fermion-Wechselwirkung muss eine UV-Cut-off-Skala  $\Lambda$  eingeführt werden. Diese nicht-renormierbare Wechselwirkung kann auch als eine effektive Beschreibung des Austausches eines schweren Teilchens (z.B. Eichbosons) durch einen lokalen Vertex angesehen werden. In diesem Sinne hat die Cut-off-Skala tatsächliche physikalische Bedeutung. Eine dynamische Berechnung der vollen Theorie ist schwierig, kann aber z.B. näherungsweise in der sog. Leiterapproximation durchgeführt werden (siehe z.B. [115]). Wir betrachten hier das Modell nur in der effektiven Näherung, in der

es dann im “Large- $N_c$ ” Limes untersucht werden kann. Das Diagramm zur Korrektur der Top-Quark-Masse



liefert die sogenannte Gap-Gleichung, die durch die Top-Quark-Masse selbstkonsistent erfüllt werden muss

$$m_t = \frac{1}{2}G \langle \bar{t}t \rangle = \frac{N_c G m_t}{8\pi^4} \int_0^\Lambda d^4k \frac{i}{k^2 - m_t^2}. \quad (\text{C.2})$$

Falls die Kopplung  $G$  größer als der kritische Wert  $G_c = 8\pi^2/N_c\Lambda^2$  ist, besitzt diese Gleichung neben der trivialen Lösung  $m_t = 0$  noch eine nicht-triviale Lösung mit  $m_t \neq 0$ . Die Gleichung C.2 bietet die Möglichkeit, durch ein Fine-Tuning der Kopplung  $G$  gegen  $G_c$  eine starke Separation der Skalen  $\Lambda$  und  $m_t$  aufzuweisen.

Die Separation der Skalen erlaubt eine wesentlich genauere Untersuchung des Modells im Rahmen der Renormierungsgruppe. Dazu geht man zu dem sog. Hilfsfeld-Formalismus über. Die Vier-Fermion-Wechselwirkung lässt sich durch ein nicht-propagierendes Skalarfeld  $\varphi$  der Masse  $G^{-1}$  ausdrücken

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} - \bar{\psi}_L \varphi t_R - \bar{t}_R \varphi^\dagger \psi_L - G^{-1} \varphi^\dagger \varphi. \quad (\text{C.3})$$

Die Anwendung der Euler-Lagrange Gleichung liefert den Zusammenhang zu der ursprünglichen Lagrange-Dichte mit

$$\varphi = -G \bar{t}_R \psi_L. \quad (\text{C.4})$$

Bei Energie-Skalen unterhalb  $\Lambda$  entwickelt dieses Composite-Skalarfeld kinetische Terme und wird damit zu einem propagierenden Top-Antitop-Bindungszustand. Damit kann die Standardmodell Lagrange-Dichte als effektiver Niederenergie-Limes der Top-Kondensations Lagrange-Dichte interpretiert werden. Um das zu sehen, reskalieren wir in der Standardmodell Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + m^2 \phi^\dagger \phi - g_t (\bar{\psi}_L \phi t_R + \bar{t}_R \phi^\dagger \psi_L) \quad (\text{C.5})$$

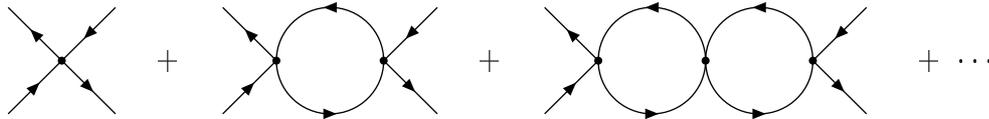
das Feld  $\varphi \equiv g_t \phi$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \frac{1}{g_t^2} (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - \frac{\lambda}{2g_t^4} (\varphi^\dagger \varphi)^2 + \frac{m^2}{g_t^2} \varphi^\dagger \varphi - (\bar{\psi}_L \varphi t_R + \bar{t}_R \varphi^\dagger \psi_L) \quad (\text{C.6})$$

Die Äquivalenz der beiden Modelle fordert die folgenden Randbedingungen von den Parametern:

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow \Lambda^2} g_t^{-2}(\mu^2) = 0, \quad \lim_{\mu^2 \rightarrow \Lambda^2} \frac{\lambda(\mu^2)}{g_t^4(\mu^2)} = 0, \quad \lim_{\mu^2 \rightarrow \Lambda^2} \frac{m^2(\mu^2)}{g_t^2(\mu^2)} = -G^{-1} \quad (\text{C.7})$$

Die Erfüllung dieser Randbedingungen erfordert einerseits das gewöhnliche Renormierungsgruppenlaufen der Kopplungen, welches durch die Standardmodell  $\beta$ -Funktionen beschrieben wird, und andererseits ein zusätzliches quadratisches Laufen des Massenparameters, welches oft als Temperatur-Laufen bezeichnet wird. Diese Bezeichnung ist aber irreführend und genau genommen sogar falsch. Letztlich ist dieses Laufen notwendig, da das Standardmodell die Loop-Beiträge der Gap-Gleichung C.2 schon in den Parametern effektiv enthält. Um nun die Randbedingungen Gl. C.7 erfüllen zu können, müssen diese Loop-Beiträge vollständig subtrahiert werden. Das wird genau durch das quadratische Laufen des Massenparameters erreicht. Mit Renormierungsgruppenlaufen ist in diesem Zusammenhang kein Zugang im wilsonschen Sinne gemeint, sondern die in der Quantenfeldtheorie übliche Renormierungsgruppe nach Gell-Mann und Low. Das ist letztlich der Grund, warum das Laufen des Massenparameters hier von Hand eingeführt werden muss. Würde man die exakte Renormierungsgruppe konsequent auf das Modell anwenden, wäre das quadratische Laufen des Massenparameters automatisch enthalten. Wir wollen das noch etwas genauer betrachten. Wir gehen dazu noch einmal von der ursprünglichen Lagrange-Dichte Gl. C.1 aus. Nun berechnen wir die Korrekturen zur Vier-Fermion-Wechselwirkung im Sinne einer Large- $N_c$  Entwicklung. Dazu summiert man folgende unendliche Blasensumme auf:



Diese Summation führt zu der Amplitude

$$\Gamma(p^2) = \frac{1/N_c}{1/G - I} . \quad (\text{C.8})$$

$I$  ist das Integral eines Loops bis zu der Cut-off-Skala  $\Lambda$ . Dieses Integral hängt davon ab, welche der vier möglichen Amplituden man betrachtet. Es kommen eine skalare sowie eine pseudoskalare Top-Top sowie positiv und negativ geladene pseudoskalare Top-Bottom Amplituden vor. Wir betrachten nun lediglich die skalare Top-Top Amplitude, das Prinzip ist für alle Amplituden gleich. Diese Amplitude

$$I_{s4}(p^2) = \frac{-i}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + m_t)(\not{k} - \not{p} + m_t)}{(k^2 - m_t^2)[(k-p)^2 - m_t^2]} \quad (\text{C.9})$$

kann in einen quadratisch divergenten sowie einen logarithmisch divergenten Term aufgespalten werden:

$$I_{s4}(p^2) = \underbrace{\frac{1}{8\pi^4} \int d^4 k \frac{i}{k^2 - m_t^2}}_{I_1} - \underbrace{\frac{(p^2 - 4m_t^2)}{8\pi^4} \int d^4 k \frac{i}{(k^2 - m_t^2)[(k-p)^2 - m_t^2]}}_{I_2} \quad (\text{C.10})$$

Das Integral  $I_1$  ist genau der Tadpole der Gap-Gleichung, sodass sich dieser Teil im Nenner der Gl. C.8 genau weghebt. Insgesamt erhält man damit die Amplitude

$$\Gamma_{s4}(p^2) = \frac{1}{N_c I_2} = \frac{1}{(p^2 - 4m_t^2) N_c \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{M^2}{p^2} + \text{endl. Terme}}. \quad (\text{C.11})$$

Wir sehen, dass die Korrekturen zu einem skalaren Teilchen-Pol mit der Masse  $M_H = 2m_t$  führen. Das Fine-Tuning der Tadpole-Gleichung sorgt auch in dieser Amplitude für ein Wegfallen der quadratischen Divergenzen und führt damit zu der Higgs-Top-Massenbeziehung. Für die pseudoskalaren Amplituden erhält man Teilchen-Pole der Masse Null. Das sind die mit der Symmetriebrechung einhergehenden Goldstone-Moden.

Jetzt wollen wir kontinuierlich die Loop-Korrekturen von dieser Amplitude abziehen. Dazu führen wir einen Infrarot-Cut-off  $\mu$  in die Loop-Integrale ein. Während man diesen Cut-off kontinuierlich anhebt, subtrahiert man damit die Loop-Beiträge, überschreitet die Skala die elektroschwache Skala, verliert man die Fine-Tuning Bedingung, die Amplitude Gl. C.8 kann dann als massiver Propagator mit der Masse  $\mu$  interpretiert werden. Im Limes  $\mu \rightarrow \Lambda$  werden sämtliche Korrekturen subtrahiert, man erhält damit wieder das ursprüngliche Resultat, einen skalaren Massenterm der Größe  $G^{-1}$ .

Mit dem Renormierungsgruppenlaufen und dem quadratischen Laufen zusammen können wir also die Randbedingungen erfüllen und damit das Niederenergie Standardmodell mit dem Hochenergie Top-Kondensations-Modell verbinden. Allerdings ist nicht der gesamte Parameterbereich des Standardmodells auf diese Weise erreichbar, man erhält vielmehr eine Verknüpfung von Higgs- und Top-Masse mit der elektroschwachen sowie der UV-Skala  $\Lambda$ . Durch die Integration der Standardmodell  $\beta$ -Funktionen können somit für vorgegebene UV-Skala und  $W$ -Masse die Top- und die Higgs-Masse berechnet werden. Die Randbedingungen der Integration stellen die Bedingungen Gl. C.7 dar. So erhält man für eine UV-Skala von z.B.  $10^{15}$  GeV eine Higgs-Masse von 256 GeV und eine Top-Masse von 229 GeV [112]. Die zusätzlichen Eichkorrekturen, die in dieser Berechnung mitenthalten sind und in unserer vereinfachten Diskussion weggelassen wurden, führen zu einer Abweichung von der einfachen Beziehung  $M_H = 2m_t$ .

Welche Bedingungen müssen nun erfüllt sein, damit diese Renormierungsgruppen-Analyse des Modells möglich ist? Erstens muss eine ausreichende Separation der Skalen (elektroschwache Skala und UV-Cut-off) vorhanden sein, damit Schwelleneffekte gegenüber dem Renormierungsgruppenfluss ausreichend unterdrückt sind, man muss also ein Modell mit ausreichendem Fine-Tuning betrachten. Zum anderen müssen natürlich auch hier die relevanten Freiheitsgrade an der UV-Skala und im Niederenergie-Limes die gleichen sein.

## C.2. Höherdimensionale Operatoren

Welche Fragen lassen sich nun durch eine konsequente Anwendung der Renormierungsgruppen-Argumente beantworten? Ein Kritikpunkt, der gegen dieses Modell ins Feld geführt wurde, war die Befürchtung, dass zusätzliche höherdimensionale Operatoren die Vorhersagekraft des Modells vollständig zerstören würden und das Modell nichts anderes als eine reine Reparametrisierung des Standardmodells darstellt [117, 118]. Wir wollen dieses Problem hier im Rahmen des

Renormierungsgruppen-Ansatzes analysieren. Wir stellen also die Frage, ob es möglich ist ein ganz allgemeines Standardmodell mit einem erweiterten Top-Kondensations-Modell in Beziehung zu setzen (selbstverständlich ist das nur möglich, wenn die Trivialitäts- und Vakuumstabilitätsbedingungen bis zu der Top-Kondensations-Skala erfüllt sind). Nachdem wir das Renormierungsgruppenlaufen bis zur Skala  $\Lambda$  ausgeführt haben, erhalten wir die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{SM}(\Lambda) = \mathcal{L}_{kin}(\Lambda) + (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda(\Lambda)}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + m^2(\Lambda) \phi^\dagger \phi - g_t(\Lambda) (\bar{\psi}_L \phi t_R + \bar{t}_R \phi^\dagger \psi_L) . \quad (\text{C.12})$$

(Wir vernachlässigen zur Vereinfachung in dieser Diskussion die Eichbeiträge.) Das zusätzliche quadratische Laufen des skalaren Massenterms führt zu der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{qr}(\Lambda) = \mathcal{L}_{kin}(\Lambda) + (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda(\Lambda)}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{g_t^2(\Lambda)}{g_{cr+}^2} \Lambda^2 \phi^\dagger \phi - g_t(\Lambda) (\bar{\psi}_L \phi t_R + \bar{t}_R \phi^\dagger \psi_L) . \quad (\text{C.13})$$

Dabei haben wir die dimensionslose Kopplung  $g_{cr+} = G\Lambda^2$  definiert. In diesem allgemeinen Fall wird die Reskalierung des Skalarfeldes, die zuvor den kinetischen Term des Skalarfeldes unterdrückt hat und so zur Erfüllung der Compositness-Bedingung geführt hat, nicht wirksam sein. Wir reskalieren deshalb das Feld diesmal durch  $\varphi \equiv \frac{g_t(\Lambda)}{g_{cr+}} \phi$ :

$$\mathcal{L}_{qr}(\Lambda) = \mathcal{L}_{kin}(\Lambda) + \frac{g_{cr+}^2}{g_t^2(\Lambda)} (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - \frac{\lambda(\Lambda) g_{cr+}^4}{2g_t^4(\Lambda)} (\varphi^\dagger \varphi)^2 - \Lambda^2 \varphi^\dagger \varphi - g_{cr+} (\bar{\psi}_L \varphi t_R + \bar{t}_R \varphi^\dagger \psi_L) \quad (\text{C.14})$$

Um nun die Verbindung zu einem erweiterten Top-Kondensations-Szenario zu schaffen müssen wir das Hilfsfeld durch die Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen eliminieren. Diese lauten

$$\varphi = \frac{1}{\Lambda^2} \left[ -g_{cr+} \bar{t}_R \psi_L - \frac{g_{cr+}^2}{g_t^2(\Lambda)} \partial^2 \varphi - \frac{g_{cr+}^4 \lambda(\Lambda)}{g_t^4(\Lambda)} \varphi \varphi^\dagger \varphi \right] , \quad (\text{C.15})$$

$$\varphi^\dagger = \frac{1}{\Lambda^2} \left[ -g_{cr+} \bar{\psi}_L t_R - \frac{g_{cr+}^2}{g_t^2(\Lambda)} \partial^2 \varphi^\dagger - \frac{g_{cr+}^4 \lambda(\Lambda)}{g_t^4(\Lambda)} \varphi^\dagger \varphi \varphi^\dagger \right] . \quad (\text{C.16})$$

Diese Gleichungen liefern die folgenden Entwicklungen des Hilfsfeldes

$$\varphi = -\frac{g_{cr+}}{\Lambda^2} \bar{t}_R \psi_L + \frac{g_{cr+}}{\Lambda^4} \partial^2 (\bar{\psi}_L t_R) + O(\Lambda^{-6}) , \quad (\text{C.17})$$

$$\varphi^\dagger = -\frac{g_{cr+}}{\Lambda^2} \bar{\psi}_L t_R + \frac{g_{cr+}}{\Lambda^4} \partial^2 (\bar{t}_R \psi_L) + O(\Lambda^{-6}) . \quad (\text{C.18})$$

Setzt man diese Entwicklungen in die Lagrange-Dichte Gl. C.13 ein, erhält man die Top-Kondensations Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{lc}(\Lambda) = \frac{g_{cr+}^2}{\Lambda^2} \bar{\psi}_L t_R \bar{t}_R \psi - \frac{g_{cr+}^2}{\Lambda^4} \left( \partial_\mu (\bar{t}_R \psi_L) \right)^\dagger \left( \partial_\mu (\bar{t}_R \psi_L) \right) + O(\Lambda^{-6}) . \quad (\text{C.19})$$

Das aber sind genau die höherdimensionalen Operatoren, die in den Arbeiten von Zinn-Justin [117] und Hasenfratz et al. [118] angeführt wurden. Wir können also in der Tat bestätigen, dass im Prinzip das Standardmodell mit beliebigen Parametern auch als Top-Kondensations-Modell mit höherdimensionalen Operatoren formulierbar ist (mit der oben erwähnten Einschränkung). Bedeutet dies aber nun wirklich, dass Top-Kondensations-Modelle immer eine reine Reparametrisierung des Standardmodells bilden? Die Antwort lautet unserer Meinung nach klar *nein!* Der Unterschied zwischen einem Modell, das lediglich eine Reparametrisierung des Standardmodells darstellt, und einem tatsächlich eigenständigen Modell ist das Auftreten von nicht-lokalen Operatoren an der Cut-off-Skala, die nicht durch das Laufen mit der Skala mit Niederenergie-Operatoren verbunden werden können. Diese irrelevanten Operatoren sind in der Niederenergiephysik durch die Cut-off-Skala unterdrückt und damit nicht sichtbar, sie stellen aber an der Cut-off-Skala den entscheidenden Unterschied dar. Sind an der Cut-off-Skala nur die Niederenergie-Operatoren (lokal oder nicht-lokal) vorhanden, handelt es sich tatsächlich um eine reine Reparametrisierung des Standardmodells. In diesem Sinne wäre das ursprüngliche BHL-Modell, legte man ihm keine Theorie an der Cut-off-Skala zugrunde, auch nur eine Reparametrisierung eines speziellen Standardmodells.

Wir wollen ein weiteres Beispiel für ein Modell aufzeigen, das in der Tat nur eine Reparametrisierung des Standardmodells darstellt. Clague und Ross [119] haben vorgeschlagen, als zugrundeliegende Theorie für die Vier-Fermion-Wechselwirkung den Austausch eines schweren Skalarfeldes anzunehmen. Die Lagrange-Dichte besitzt also zusätzlich ein Skalarfeld, aber mit positivem Massenquadrat, also ohne spontane Symmetriebrechung. Das skalare Potenzial lautet also

$$V(\Phi) = m_\phi^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 . \quad (\text{C.20})$$

Die Autoren analysierten den Austausch des Skalarfeldes im Large- $N_c$  Limes, in dem nur der s-Kanal beiträgt. Für sehr große Top-Yukawa-Kopplung kann dies zur Top-Kondensation führen, das skalare Potenzial erhält dann einen zusätzlichen Beitrag

$$V(\Phi) = m_\phi^2 |\Phi|^2 + \lambda |\Phi|^4 + \frac{g_t}{\sqrt{2}} \langle \bar{t}t \rangle \phi_3 , \quad (\text{C.21})$$

was letztlich zu einem Vakuumerwartungswert der Komponente  $\phi_3$  des Skalarfeldes führt

$$\langle \phi_3 \rangle = v = -\frac{g_t \langle \bar{t}t \rangle}{\sqrt{2} m_\phi^2} . \quad (\text{C.22})$$

Das wurde als ein Zeichen für das Auftreten einer leichten Komponente des fundamentalen Higgs-Feldes zusätzlich zum Composite-Higgs gedeutet. Sehen wir uns dieses Modell im Renormierungsgruppen-Formalismus etwas genauer an, stellen wir fest, dass es genau durch die Lagrange-Dichte Gl. C.14 beschrieben wird, wenn wir  $g_t(\Lambda) = g_{cr+}$  setzen. Das Modell entspricht also genau dem vorher diskutierten Fall, es enthält keine zusätzlichen nicht-lokalen irrelevanten Operatoren, dafür aber an der Cut-off-Skala noch kinetische Terme des Skalarfeldes. Das Skalarfeld erfüllt somit auch keine Compositeness-Bedingung. Dieses Modell ist damit nur eine reine Reparametrisierung des Standardmodells. Das Missverständnis basiert auf der falschen Interpretation des quadratischen Laufens. Letztlich ist das leichte Skalarfeld nichts anderes als

das ursprüngliche Skalarfeld plus alle Renormierungsgruppen- und quadratischen Korrekturen. Im Sinne der exakten Renormierungsgruppe entwickelt sich der positive Massenquadrat-Term bei dem Herunterlaufen der Skala zu einem negativen Term (das haben wir auch schon bei der Diskussion in Abschnitt 4.5.2 explizit gesehen). Da das Skalarfeld aber in diesem Fall an der Cut-off-Skala fundamental ist, muss es gegenüber dem BHL-Modell keine Compositeness-Bedingung erfüllen, und an der Cut-off-Skala sind damit noch kinetische Terme des Skalarfeldes enthalten. Anders ist die Sache hingegen, wenn man den Austausch von schweren Eichbosonen zugrunde legt [120, 121]. Die Entwicklung in höherdimensionale Operatoren lautet in diesem Fall schematisch

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi V^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2} V_\mu V^\mu \\ &= -\frac{g^2}{2M^2} j_\mu j^\mu - \frac{g^2}{4M^4} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + O(M^{-6})\end{aligned}\quad (\text{C.23})$$

mit

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad J_{\mu\nu} = (\partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu) . \quad (\text{C.24})$$

Diese enthalten (nach Fierz-Transformation) sowohl den Vier-Fermion-Term der Top-Kondensations Lagrange-Dichte, als auch weitere höherdimensionale Operatoren. Unter diesen befindet sich aber kein Beitrag zu dem skalaren kinetischen Term. Diese Operatoren haben also keine Entsprechung in der Niederenergiephysik und können durch das Laufen mit der Skala nicht mit der Niederenergiephysik verbunden werden. Damit ist ein solches Modell keine reine Reparametrisierung des Standardmodells. Außerdem sind alle irrelevanten Operatoren durch die Cut-off-Skala unterdrückt, es wird kein skalarer kinetischer Term an der Cut-off-Skala erzeugt, die Niederenergiephysik kann deshalb nur unmessbar durch solche irrelevanten Operatoren beeinflusst werden.

Eine weitere Frage, die sich hier anschließt ist die Frage nach leichten Vektor-Bindungszuständen in der Niederenergiephysik. Die Auswirkungen solcher zusätzlichen Bindungszustände wurden in Ref. [122] diskutiert, dabei aber die Frage offen gelassen, ob solche leichten Bindungszustände überhaupt möglich sind. Der vorher beschriebene Austausch von schweren Vektor-Teilchen produziert auch Kopplungen der Art

$$G' \left( \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L \right) \left( \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \right) + G'' \left( \bar{t}_R \gamma_\mu t_R \right) \left( \bar{t}_R \gamma^\mu t_R \right) . \quad (\text{C.25})$$

Diese können im Prinzip zu einer Bildung von Vektor-Bindungszuständen führen. Da diese Operatoren an der Cut-off-Skala existieren, werden diese Bindungszustände zunächst eine Masse von der Ordnung der Cut-off-Skala besitzen. Die Frage ist nun, ob auch diese Bindungszustände durch ein zusätzliches quadratisches Laufen abgesenkt werden können und Massen von der Ordnung der elektroschwachen Skala erhalten. Die Massen solcher zusätzlichen Vektor-Bindungszustände sind aber nicht an den Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes gekoppelt. Damit können sie auch kein quadratisches Laufen zeigen, da dies ja nur notwendig war um die Korrekturen der Gap-Gleichung zu den Standardmodell-Parametern zu subtrahieren. Das quadratische Laufen ist damit essenziell mit dem Fine-Tuning der Gap-Gleichung verknüpft, welches für solche Vektormassen nicht existiert. Damit ist es nicht möglich, dass im Rahmen eines solchen Modells leichte Vektor-Bindungszustände im Niederenergiespektrum auftauchen.

Wir sehen, eine konsequente Ausnutzung von Renormierungsgruppen-Argumenten kann auch in Top-Kondensations-Modellen eine Reihe interessanter Frage beantworten, die durch direkte dynamische Methoden z.B. mittels Schwinger-Dyson-Gleichungen nur äußerst schwierig zu beantworten sind.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. Bilenky: Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999), S. 1.
- [2] A. J. Buras: *CP Violation and Rare Decays of K and B Mesons*. (1999), Lectures given at Lake Louise Winter Institute: Electroweak Physics, Lake Louise, Alberta, Canada (1999).
- [3] R. Bernabei et al.: Phys. Lett. **B 450** (1999), S. 448.
- [4] R. Bernabei et al.: ROM2F/2000/01, INFN/AE-00/01.
- [5] R. Abusaidi et al.: astro-ph/0002471.
- [6] D. A. Kirzhnits, A. D. Linde: Sov. Phys. JETP **40** (1974), S. 628.
- [7] D. A. Kirzhnits, A. D. Linde: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67** (1974), S. 1263.
- [8] E. W. Kolb, M. S. Turner: *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company (1990).
- [9] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, M. Shaposhnikov: Phys. Rev. Lett. **77** (1996), S. 2887.
- [10] F. Karsch, T. Neuhaus, A. Patkos, J. Rank: Nucl. Phys. **474** (1996), S. 217; Prog. Suppl. Nucl. Phys. **B 53** (1997), S. 623.
- [11] M. Gürtler et al.: Phys. Rev. **D 56** (1997), S. 3888.
- [12] E.-M. Ilgenfritz, A. Schiller, G. Strecha: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999), S. 662.
- [13] Y. Aioki: Phys. Rev. **D 56** (1997), S. 3860.
- [14] Y. Aioki, F. Ciskor, Z. Fodor, A. Ukawa: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999), S. 656.
- [15] F. Ciskor, Z. Fodor, J. Heitger: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999), S.659.
- [16] T. W. B. Kibble: J. Phys. **A 9** (1976), S. 1387.
- [17] W. H. Zurek: Nature **382** (1996), S. 297.
- [18] R. R. Parwani: Phys. Rev. **D 45** (1992), S. 4695.
- [19] E. Wang, U. Heinz: Phys. Rev. **D 53** (1996), S. 899.

- [20] A. D. Linde: Phys. Lett. **B 96** (1980), S. 289.
- [21] J. Schwinger: J. Math. Phys. **2** (1961), 407.
- [22] L. V. Keldysh: JETP **20** (1965), 1018.
- [23] E. Calzetta, B. L. Hu: Phys. Rev. **D37** (1988), S. 2878.
- [24] P. V. Landshoff: DAMTP-1998-112, hep-ph/9808362.
- [25] A. Niemi, G. Semenoff: Ann. of Phys. **152** (1984), 105.
- [26] R. Kubo: J. Phys. Soc. Japan **12** (1957), S. 570.
- [27] P. C. Martin, J. Schwinger: Phys. Rev. **115** (1959), S. 1342.
- [28] D. Bailin, A. Love: *Introduction to Gauge Field Theory*, Institute of Physics Publishing 1993.
- [29] M. Lebellac: *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press 1996
- [30] J. I. Kapusta: *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press 1989.
- [31] N. P. Landsmann, C. van Weert: Phys. Rep. **145** (1987), 141.
- [32] M. Quiros: Helv. Phys. Acta **67** (1994), S. 451.
- [33] K. G. Wilson: Phys. Rev. **B4** (1971), S. 3174.
- [34] K. G. Wilson: Phys. Rev. **B4** (1971), S. 3184.
- [35] K. G. Wilson, J. Kogut: Phys. Rep. **12** (1974), S. 76.
- [36] L. P. Kadanoff: Physics **2** (1966), S. 263.
- [37] J. Zinn-Justin: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press Oxford 1996.
- [38] E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann: Helv. Phys. Acta **26** (1953) S. 499.
- [39] M. Gell-Mann, F. E. Low: Phys. Rev. **95** (1954), S. 1300.
- [40] R. B. Griffiths: Phys. Rev. Lett. **24** (1970), S. 1479.
- [41] L. S. Ornstein, F. Zernike: Proc. Akad. Sci. Amsterdam **17** (1914), S. 783.
- [42] L. S. Ornstein, F. Zernike: Proc. Akad. Sci. Amsterdam **18** (1916), S. 1520.
- [43] L. Onsager: Phys. Rev. **65** (1944), S. 117.
- [44] J. Polchinski: Nucl. Phys. **B 231** (1984), S. 169.

- [45] W. H. Zurek: *Nature* **317** (1985), S. 505.
- [46] W. H. Zurek: *Phys. Rep.* **276** (1996), S. 177.
- [47] A. J. Gill, T. W. B. Kibble: *J. Phys. A* **29** (1996), S. 4289.
- [48] M. J. Bowick: *Science* **263** (1994), S. 943.
- [49] P. C. Hendry et al.: *Nature* **368** (1994), S. 315.
- [50] C. Bäuerle et al.: *Nature* **382** (1996), S. 332.
- [51] V. M. H. Ruutu et al.: *Nature* **382** (1996), S. 334.
- [52] A. Ringwald, C. Wetterich: *Nucl. Phys. B* **334** (1990), S. 506.
- [53] C. Wetterich: *Nucl. Phys. B* **352** (1991), S. 529.
- [54] C. Wetterich: *Z. Phys. C* **57** (1993), S. 451.
- [55] C. Wetterich: *Z. Phys. C* **60** (1993), S. 461.
- [56] C. Wetterich: *Phys. Lett. B* **301** (1993), S. 90.
- [57] M. Bonini, M. D'Attanasio, G. Marchesini: *Nucl. Phys. B* **409** (1993), S. 441.
- [58] T. R. Morris: *Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994), S. 2411.
- [59] C. Wetterich: *Z. Phys. C* **72** (1996), S. 139.
- [60] B. Bergerhoff, C. Wetterich: *Phys. Rev. D* **57** (1998) S. 1591.
- [61] M. Reuter, C. Wetterich: *Phys. Rev. D* **56** (1997), S. 7893.
- [62] D. U. Jungnickel, C. Wetterich: *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131** (1998), S. 495.
- [63] S. Bornhold, N. Tetradis, C. Wetterich: *Phys. Rev. D* **53** (1996), S. 4552.
- [64] B. Bergerhoff, C. Wetterich: *Nucl. Phys. B* **440** (1995), S. 171.
- [65] N. Tetradis, C. Wetterich: *Nucl. Phys. B* **422** (1994), S. 541.
- [66] N. Tetradis, C. Wetterich: *Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994), S. 4029.
- [67] A. Weber: *Exakte Renormierungsgruppengleichungen in der Quantenfeldtheorie*, Dissertation, Heidelberg 1995.
- [68] J. Berges: hep-ph/9708340.
- [69] J. Berges: hep-ph/9902419.

- [70] C. Bagnuls, C. Bervillier: hep-th/0002034.
- [71] M. D'Attanasio, M. Pietroni: Nucl. Phys. **B 472** (1996), S. 711.
- [72] M. D'Attanasio, M. Pietroni: Nucl. Phys. **B 498** (1997), S. 443.
- [73] A. Manohar, H. Georgi: Nucl. Phys. **B 234** (1984), S. 189.
- [74] U. Ellwanger, C. Wetterich: Nucl. Phys. **B 423** (1994), S. 137.
- [75] D. U. Jungnickel, C. Wetterich: Phys. Rev. **D 53** (1996), 5142.
- [76] J. Berges, D. U. Jungnickel, C. Wetterich: Phys. Rev. **D 59** (1999), 034010.
- [77] J. Berges, D. U. Jungnickel, C. Wetterich: hep-ph/9811347.
- [78] R. Pisarski, F. Wilczek: Phys. Rev. **D 29** (1984), S. 338.
- [79] F. Wilczek: Int. J. Mod. Phys. **A 7** (1992), S. 3911.
- [80] K. Rajagopal, F. Wilczek: Nucl. Phys. **B 399** (1993), S. 395.
- [81] A. Kocic, J. Kogut: Phys. Rev. Lett. **74** (1995), S. 3109.
- [82] A. Kocic, J. Kogut: Nucl. Phys. **B 455** (1995), S. 229.
- [83] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, C. G. Strouthos: Phys. Rev. **D 58** (1998), 096001.
- [84] M. Fukugita, H. Mino, M. Okawa, A. Ukawa: Phys. Rev. **D 42** (1990), S. 2936.
- [85] A. Vaccarino: Nucl. Phys. Prog. Suppl. **B 20** (1991), S. 263.
- [86] Y. Iwasaki, K. Kanaya, S. Sakai, Y. Yoshie: Nucl. Phys. Prog. Suppl. **B 30** (1993), S. 327.
- [87] F. Flechsig, A. K. Rebhan: Nucl. Phys. **B 464** (1996), 279.
- [88] B. Bergerhoff: Phys. Lett. **B 437** (1998), 381-389.
- [89] B. Bergerhoff, J. Reingruber: Phys. Rev. **D 60** (1999), 105036.
- [90] B. Bergerhoff, J. Manus, J. Reingruber: hep-ph/9912474, erscheint in Phys. Rev. **D**.
- [91] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C*, Second Edition Cambridge University Press 1992.
- [92] G. Baker, D. Meiron, B. Nickel: Phys. Rev. **B 17** (1978), 1365.
- [93] K. Kanaya, S. Kaya: Phys. Rev. **D 51** (1995), S. 2404.
- [94] B. Widom: J. Chem. Phys. **43** (1965), S. 3892.

- [95] N. Tetradis, C. Wetterich: Nucl. Phys. **B 398** (1993), S. 659.
- [96] J. R. Espinosa, M. Quiros, F. Zwirner: Phys. Lett. **B 291** (1992), S. 115.
- [97] D. U. Jungnickel, C. Wetterich: Eur. Phys. J. **C 1** (1998), S. 669.
- [98] J. Gasser, H. Leutwyler: Phys. Rept. **C 87** (1982), S. 77.
- [99] J. Gasser, H. Leutwyler: Ann. Phys. **158** (1984), S. 142.
- [100] J. Gasser, H. Leutwyler: Nucl. Phys. **B 250** (1985), S. 465.
- [101] J. Gasser, H. Leutwyler: Phys. Lett. **B 184** (1987), S. 83.
- [102] H. Leutwyler: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B 4** (1988), S. 248.
- [103] C. Bernard et al.: Phys. Rev. **D 55** (1997), S. 6861.
- [104] C. Bernard et al.: Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B 53** (1997), S. 442.
- [105] J.-I. Sumi, W. Souma, K.-I. Aoki, H. Terao, K. Morikawa: hep-th/0002231.
- [106] J. Collins: *Renormalization*, Cambridge University Press 1984.
- [107] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Phys. Rev. **122** (1961), 345.
- [108] V. G. Vaks and A. I. Larkin: Sov. Phys. JETP **13** (1961), 192.
- [109] Y. Nambu: *New Theories in Physics, proceedings of the XI International Symposium on Elementary Particle Physics, edited by Z. Ajduk, S. Pokorski and A. Trautman (World Scientific, Singapore, 1989)*.
- [110] V. A. Miranski, M. Tanabashi, K. Yamawaki: Mod. Phys. Lett. **A 4** (1989), 1043.
- [111] V. A. Miranski, M. Tanabashi, K. Yamawaki: Phys. Lett. **B 221** (1989), 177.
- [112] W. A. Bardeen, C. T. Hill, M. Lindner: Phys. Rev. **D 41** (1990), 1647.
- [113] M. Lindner: Int. J. Mod. Phys. **A 8** (1993), 2167.
- [114] G. Cvetič: Rev. Mod. Phys. **71** (1999), 513.
- [115] A. Blumhofer, J. Manus: Nucl. Phys. **B 515** (1998), 522.
- [116] A. Blumhofer, R. Dawid, J. Manus: Phys. Rev. **D 58** (1998), 035009.
- [117] J. Zinn-Justin: Saclay preprint SPhT/91-092.
- [118] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, K. Jansen, J. Kuti, Y. Shen: Nucl. Phys. **B 365** (1991), S. 79.
- [119] D. E. Clague, G. G. Ross: Nucl. Phys. **B 364** (1991), S. 43.

[120] M. Lindner, D. Ross: Nucl. Phys. **B 370** (1992), S. 30.

[121] C. T. Hill: Phys. Lett. **B 266** (1991), S. 419.

[122] M. Lindner, D. Lüst: Phys. Lett. **B 271** (1991), S. 91.

## DANKSAGUNG

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Manfred Lindner bedanken, der es mir ermöglicht hat auf dem interessanten Gebiet der thermalen Quantenfeldtheorie zu arbeiten. Die Unterstützung war immer hervorragend und hat wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Dann möchte ich mich natürlich ganz herzlich bei meinen Freunden und Kollegen Bastian Bergerhoff, Andreas Blumhofer, Richard Dawid und Jürgen Reingruber für die Zusammenarbeit, in der diese Dissertation entstanden ist, bedanken. Durch diverse Aktivitäten, vom Tischtennis bis hin zu “Whisky und Beethoven” habt ihr auch für einige “Auflockerung” gesorgt.

Bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Andrzej Buras, der nicht zuletzt durch viele aufmunternde Gespräche stets zu einer angenehmen Atmosphäre in der Hochenergie Community beiträgt. (Obwohl er mir so manche bittere Niederlage im Tischtennis bereitet hat - irgendwann krieg ich dich schon noch!)

Bei den (Ex-)Sekretärinnen Barbara Brittain, Marianne Glandien, Elke Krüger und Daniela Sifakis sowie allen anderen (Ex-)Mitgliedern der Gruppen Buras, Drees, Lindner und Nilles, die hier nicht namentliche Erwähnung finden, bedanke ich mich herzlich für die Hilfsbereitschaft und angenehme Arbeitsumgebung.

Besonderer Dank gebührt den Korrektur-Lesern des Manuskripts Bastian Bergerhoff, Ilse Hausner und Jürgen Reingruber.

Zuletzt möchte ich mich bei all jenen entschuldigen, die so manche grantige Bemerkung während der “heißen” Phase erdulden mussten.