

Neutrino-Oszillationen

David von Lindenfels

29. April 2008

Motivation

Neutrino-Oszillationen sind ein wichtiger Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells. So widerspricht das Sonnenmodell mit seinem vorhergesagten Neutrinofluss der Forderung, dass die leptonischen Flavorquantenzahlen streng erhalten sind.

Dies wird am einfachsten durch die im Folgenden skizzierte Phänomenologie der Neutrino-Oszillationen aufgelöst. Allerdings benötigen wir dafür massive Neutrinos, was im Rahmen des einfachen Standardmodells unbefriedigend ist. Zusätzlich wirft es die Frage nach der Helizität auf und, ob Neutrinos mit ihren Antiteilchen übereinstimmen.

Allgemeine Überlegungen

Wir betrachten quantenmechanische Oszillationen zwischen den sogenannten Neutrino-Flavor-Eigenzuständen $(|\nu_\alpha\rangle)_{\alpha=e,\mu,\tau,\dots}$, die aus dem Standardmodell bekannt sind.

Ursache für die Schwinungen ist, dass Flavorzustände Linearkombinationen der Neutrino-Massen-Eigenzustände $(|\nu_i\rangle)_{i=1,2,3,\dots}$ sind, deren Massen sich unterscheiden. Es handelt sich um Eigenzustände des Massenoperators:

$$\langle \nu_i | M | \nu_j \rangle = \delta_{ij} m_i$$

Die Zeitentwicklung im Ruhesystem (!) ist gegeben durch $|\nu(\tau)\rangle = \exp(-iH\tau) |\nu(0)\rangle$ und so propagieren die Massenzustände gemäß $H_{ii}\tau = m_i\tau \approx (c + \frac{m_i^2}{2E})L$ (τ : Eigenzeit, L : Entfernung vom Erzeugungsort) mit unterschiedlichen Frequenzen, sodass sich die Zusammensetzung eines präparierten Flavorzustands ändert. Mit der unitären Transformation zwischen den Basissystemen: $|\nu_i\rangle = \sum U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$ lässt sich die Überlappamplitude ausdrücken als

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L) \rangle = U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{-i \frac{m_i^2 L}{2E}}$$

wobei wir stets Phasenfaktoren vernachlässigen, die allen Zuständen gemeinsam sind. Für die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen beliebigen Flavorzuständen gilt dann

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; L) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L) \rangle|^2 \\ &= \delta_{\beta\alpha} - 4 \sum_{j < i} \Re\{U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}\} \sin^2 \frac{\Delta_{ij}}{2} + 2 \sum_{j < i} \Im\{\dots\} \sin \Delta_{ij} \quad (1) \\ \Delta_{ij} &= \frac{(m_i^2 - m_j^2)L}{2E} \end{aligned}$$

In einer Welt mit 2 Neutrinoarten...

...gibt es für die Mischungsmatrix nur 2 Freiheitsgrade: den Mischungswinkel θ und die komplexe Phase ξ , die hier ohne Bedeutung ist, weil sie „am Rand“ steht.

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\xi/2} & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Tab. 6.4 Ungefähre Bereiche der Neutrinoenergie E , des Abstandes L und des Verhältnisses L/E sowie Empfindlichkeitsgrenzen δm_{\min}^2 für die verschiedenen Neutrinoquellen in Oszillationsexperimenten.

ν -Quelle	ν -Arten der Quelle	E -Bereich [MeV]	L -Bereich [m]	L/E -Bereich [m/MeV]	δm_{\min}^2 [eV ²]
Reaktor	$\bar{\nu}_e$	1-10	10 - 10^2	1 - 10^2	10^{-2}
Hochenergie-Beschleuniger	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	10^3 - 10^5	(a) 10^2 - 10^3 (b) 10^4 - 10^7	10^{-3} - 1 10^{-1} - 10^4	1 10^{-4}
Niederenergie-Beschleuniger	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	10 - 10^2	10 - 10^2	10^{-1} - 10	10^{-1}
Atmosphäre	$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e, \bar{\nu}_e$	10^2 - 10^4	10^4 - 10^7	1 - 10^5	10^{-5}
Sonne	ν_e	10^{-1} -10	10^{11}	10^{10} - 10^{12}	10^{-12}

(a) kurze Grundlinie, (b) lange Grundlinie

Abbildung 1: N. Schmitz: Neutrino-Physik S.254

Damit lautet der Hamiltonian (mal Eigenzeit \rightarrow Phase) in der Flavordarstellung

$$H^\alpha_\tau = UH^iU^\dagger_\tau = \frac{DL}{4E} \begin{pmatrix} c - \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & c + \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit $D = m_1^2 - m_2^2$ und die Erhaltungswahrscheinlichkeit (Disappearance-Experiment) vereinfacht sich zu

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{DL}{4E} \quad (3)$$

Das ist eine Oszillation mit der Amplitude $a = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$ und Schwingungslänge $L_0 = \frac{4\pi E}{D}$. Für sinnvolle Messungen muss $L \approx L_0$ sein, woraus sich Werte für die experimentell zugänglichen Massenaufspaltungen ergeben. Diese sind in Abb 1 für einige Beispiele aufgeführt.

Der realistische Fall

Die allgemeinste Mischungsmatrix in einem Dreiflavorraum hat 3 Winkel und 3 Phasen, davon 1 CP-verletzende: δ . Um die Winkelfunktionen der Mischungswinkel abzukürzen schreiben wir $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und entsprechend für sin

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\xi_1/2} & & \\ & e^{i\xi_2/2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Experimentelle Werte für die Massenaufspaltungen sind

$$|m_1^2 - m_2^2| \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2 \\ |m_1^2 - m_3^2| \approx 2.5 \cdot 10^{-3} \text{eV}^2 =: D$$

sodass sich sehr unterschiedliche Oszillationslängen für die verschiedenen Schwingungstypen ergeben. Für kleine Abstände (Reaktor-Neutrinos) sind m_1 und m_2 effektiv entartet:

$$\sin^2 \frac{\Delta_{12}}{2} \ll \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \approx \sin^2 \frac{\Delta_{23}}{2}$$

und mit den einfachen Nebenrechnungen 4 und 5 vereinfacht sich Gleichung 1 zu 6, welche die vom Zweizustandssystem bekannte Form (s. Gl. 3) hat.

$$1 = \langle \nu_e | \nu_e \rangle = U_{e1}U_{e1}^* + U_{e2}U_{e2}^* + U_{e3}U_{e3}^* \quad (4)$$

$$0 = \langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = U_{\mu 1}U_{e1}^* + U_{\mu 2}U_{e2}^* + U_{\mu 3}U_{e3}^* \quad (5)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; L) \approx 4 |\langle \nu_\mu | \nu_3 \rangle \langle \nu_e | \nu_3 \rangle|^2 \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2}$$

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; L) &\approx 1 - 4 |\langle \nu_e | \nu_3 \rangle|^2 (1 - |\langle \nu_e | \nu_3 \rangle|^2) \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \frac{\Delta_{13}}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei spielt offensichtlich $|U_{e3}|^2 = \sin^2 \theta_{13}$ eine entscheidende Rolle. Der Überlapp eines Flavorzustandes mit dem isolierten Massenzustand bestimmt die Oszillationsstärke. Die Einträge von U sind betragsmäßig durch

$$U \approx \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} & 0 \\ \sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$$

gegeben und somit ist $|\nu_e\rangle$ sehr stabil, während $|\nu_\mu\rangle$ und $|\nu_\tau\rangle$ wie $\cos^2 \frac{\Delta_{13}}{2}$ ineinander übergehen.

Oszillationen in Materie

Materie besteht überwiegend aus Teilchen der ersten Familie und so ist bei der kohärenten elastischen Streuung das Elektroneneutrino ausgezeichnet, da es mit den Elektronen auch W-Bosonen austauschen kann (bei anderen Neutrino-Flavors wäre das keine elastische Streuung). Dieser Sachverhalt lässt sich durch ein effektives Potential $V = \sqrt{2}G_F N_e$ (G_F : Kopplungskonstante, N_e : Elektronendichte) beschreiben, das zum Hamiltonian addiert wird und einer Verschiebung der Massenquadrate äquivalent ist:

$$\begin{aligned} m_{ee}^2 \rightarrow m_{eem}^2 &= m_{ee}^2 + A, \quad A = 2EV \\ \Leftrightarrow H_m^\alpha \tau &= H^\alpha \tau + \begin{pmatrix} VL + c & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir wieder einen Zweizustandsraum an, erzeugt von Elektron- und Myon-Neutrino. Sei θ der Winkel zwischen $|\nu_1\rangle$ und $|\nu_e\rangle$. Dann wird aus dem Vakuum-Hamiltonian aus Gl. 2:

$$H_m^\alpha \tau = \frac{D_m L}{4E} \begin{pmatrix} c' - \cos 2\theta_m & \sin 2\theta_m \\ \sin 2\theta_m & c' + \cos 2\theta_m \end{pmatrix}$$

Der neue Operator hat die gleiche Form wie der alte, aber seine Eigenzustände sind um den Winkel θ_m gegen die Flavorzustände verdreht und die „Massenquadrate“ um D_m aufgespalten. Die Parameter in Materie hängen von den Vakuumwerten und A wie folgt ab:

$$\begin{aligned} D_m &= D \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - A/D)^2} \\ \sin^2 2\theta_m &= \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - A/D)^2} \end{aligned}$$

Dabei hat $\sin^2 2\theta_m$ als Funktion von A bei nichtverschwindendem Vakuummischungswinkel die Form einer Resonanz (s. Abb. 2) und θ_m strebt (wenn es eine differenzierbare Funktion sein soll) für $A \rightarrow \infty$ gegen 90° .

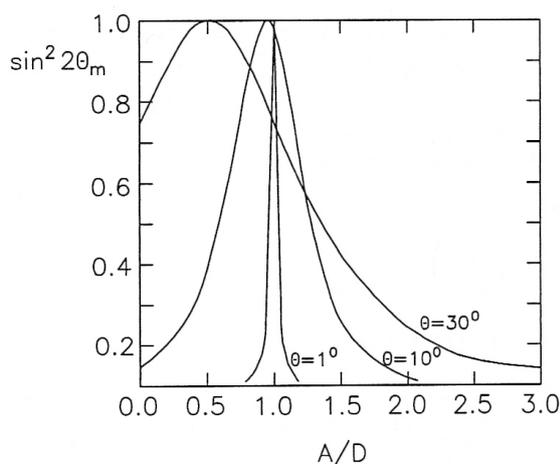


Abb. 6.33
Abhängigkeit
der Oszillationsamplitude in Ma-
terie vom Verhältnis A/D (siehe Text) für verschiedene Werte
des Vakuummischungswinkels
 θ ($\theta = 1^\circ, 10^\circ, 30^\circ$).

Abbildung 2: N. Schmitz: Neutrino-Physik S.284

Speziell für $0 < \theta \ll 1$ bewirkt diese sogenannte MWS-Resonanz (nach Mikheyev, Smirnov, Wolfenstein) folgendes: Im Inneren der Sonne wird bei sehr hoher Elektronendichte (und somit großem A/D , also $\theta_m \approx 90^\circ$) ein Elektronneutrino präpariert, das ziemlich genau $|\nu_{2m}\rangle$ entspricht. Nimmt N_e auf einer Schwingungslänge entlang des Weges nur allmählich ab (Adiabatizität: $|N_e(r) - N_e(r + L_m)| / N_e(r) \ll 1$), dann verbleibt das Teilchen im jeweiligen 2. Massenzustand. Dieser dreht sich jedoch durch den Flavorraum, bis er am Rand der Sonne (Vakuum) nur noch den Winkel θ hat, also hauptsächlich $|\nu_\mu\rangle$ enthält.

Dieser „Flavorflip“ ist für kleine Vakuummischungswinkel besonders stark ausgeprägt ($P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \approx \cos^2 \theta$), in einer sehr kleinen Umgebung um $\theta = 0$ verschwindet er aber: die Schwingungslänge nimmt bei der Resonanz bis $L_m = L_0 / \sin \theta$ zu und daher lässt sich mit gegebenen experimentellen Bedingungen die Adiabatizität nicht verwirklichen. Für $\theta = 0$ sind Oszillationen sogar prinzipiell ausgeschlossen.

Zusammenfassung

Wir haben gesehen, dass Oszillationen möglich sind, wenn es massive Neutrinos gibt (oder besser: Neutrinos mit unterschiedlichen Massenquadraten) und diese nicht exakt mit den Flavor-Eigenzuständen übereinstimmen. Aufgrund der stark unterschiedlichen $|\delta m^2_{ij}|$ sind 3-Flavor-Effekte in manchen Fällen vernachlässigbar. Die Anwesenheit von Materie kann Oszillationen beträchtlich verstärken.