

5 Frequenzmodulationsspektroskopie

Die Resonanzlinien beschreiben bei der Sättigungsspektroskopie eine Lorentzkurve. Bei Anwenden der Technik der FM-Spektroskopie sehen wir die Ableitung dieser Kurven, d. h. bei der Resonanzfrequenz einen Nulldurchgang. Die Messung ist damit empfindlicher.

Das Prinzip der FM-Modulationsspektroskopie ist folgendes: Der Laserfrequenz wird eine Hochfrequenz aufmoduliert. Das gemessene Signal wird mit dem Signal des VCO gemischt und durch einen Tiefpass geleitet, damit die hochfrequenten Terme herausgefiltert werden.

5.1 Prinzip der FM-Spektroskopie

Moduliert man die Laserfrequenz ω_T mit einer Hochfrequenz ω_M (siehe Kapitel 2 Resonator), so ergibt sich für das vom Laser emittierte Lichtfeld:

$$E(t) = E_0 \cdot e^{i\omega_T t + iM \sin \omega_M t} + c.c. \quad (5.1)$$

E_0 ist die Amplitude der Lichtwelle und M der Modulationsindex. Ist $M \ll 1$ (also eine kleine Amplitude der Modulation), so kann man folgende Näherung durchführen:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cdot e^{i\omega_T t} \cdot e^{iM \sin \omega_M t} + c.c. \\ &\approx E_0 \cdot e^{i\omega_T t} (1 + iM \sin \omega_M t) + c.c. \\ &= E_0 \cdot e^{i\omega_T t} \left(1 - \frac{M}{2} e^{-i\omega_M t} + \frac{M}{2} e^{+i\omega_M t}\right) + c.c. \\ &= E_0 \left(e^{i\omega_T t} - \frac{M}{2} e^{i(\omega_T - \omega_M)t} + \frac{M}{2} e^{i(\omega_T + \omega_M)t} \right) + c.c. \quad (5.2) \end{aligned}$$

Man erhält also ein Frequenzspektrum mit einem starken Träger bei der Frequenz ω_T und zwei schwachen Seitenbändern bei den Frequenzen $\omega_T \pm \omega_M$ (s. Abb. 5.1). Wir schicken nun

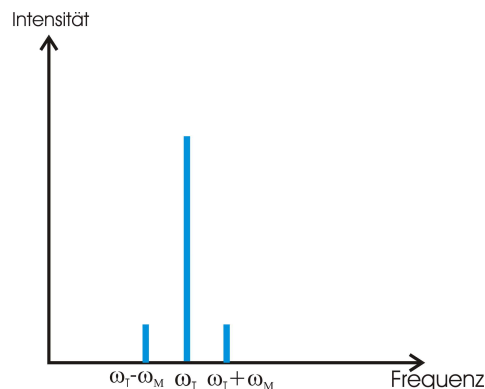


Abbildung 5.1: Modulierte Laserfrequenz

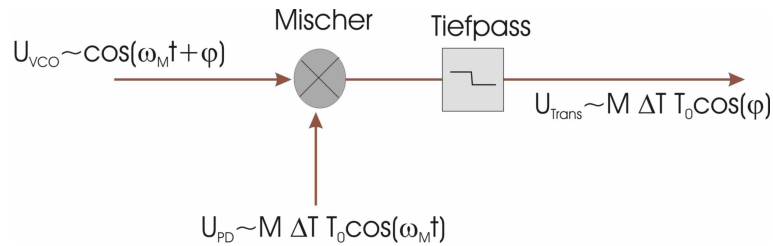


Abbildung 5.2: Schema des Mixers

das Laserlicht dieses Frequenzspektrums durch den Resonator oder die Cs-Zelle. Der Resonator transmittiert nur die Frequenzen, für die er resonant ist (siehe Kapitel 2 Resonator), während atomare Medien die Frequenzen ihrer atomaren Resonanzfrequenzen absorbieren. Das Ausgangssignal wird mit dem Signal des VCO's gemischt und danach werden mit Hilfe eines Tiefpasses die hochfrequenten Anteile herausgefiltert. Das resultierende Endsignal hat dann folgende Gestalt:

$$U_{\text{END}_0} \propto -\frac{1}{2} M \Delta T \cos \varphi \quad (5.3)$$

wobei ΔT die Differenz der Absorption der beiden Seitenbänder ist, φ die Phasenverschiebung zwischen dem Ausgangssignal der Photodiode und dem VCO-Signal. Eine Veranschaulichung dieser Formel liefert [Abb. 5.3](#). Aus einer Transmissionslinie wird somit ein Signal wie in [Abb. 5.4](#).

Es gibt sowohl beim Resonator als auch beim Cäsium noch einen weiteren Effekt: Dispersion, d. h. eine Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex. Beim Einbeziehen der Dispersion erhält man folgendes Endsignal:

$$U_{\text{END}} \propto M \left[-\frac{1}{2} \Delta T \cos \varphi + \frac{1}{2} \Delta \phi \sin \varphi \right]. \quad (5.4)$$

wobei $\Delta \phi$ die Differenz der relativen Phasenverschiebungen der beiden Seitenbänder ist. Die genaue Herleitung dieses Signals findet man in den [Kurzerklärungen](#). Das Endsignal ist zeitunabhängig und hängt nur von der Phasenverschiebung zwischen den beiden gemischten Signalen ab. Man kann die Phase φ so einstellen, dass entweder der Sinus- oder Cosinusterm verschwindend klein ist und der andere Term dominiert.

Testfragen: *FM-Spektroskopie*

- Man ändert die Phase φ um 180° . Wie ändert sich dabei das Signal U_{END} ?
- Welche Phasenverschiebung (in ns) entspricht bei einer Modulationsfrequenz von $\omega_M = 35$ MHz bzw. $\omega_M = 70$ MHz einer Änderung der Phase von 90° bzw. 180° ?

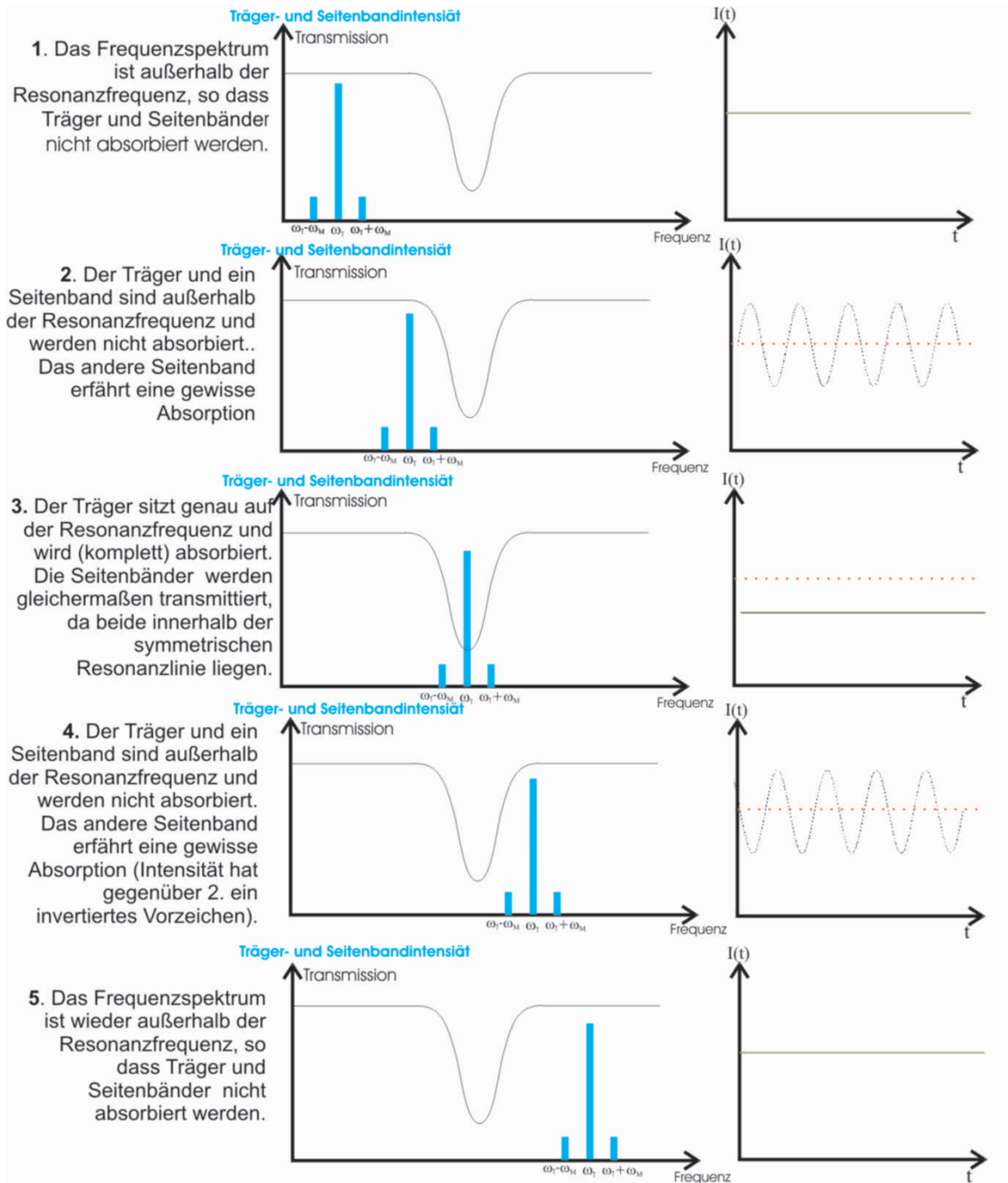


Abbildung 5.3: Wird die modulierte Laserfrequenz über die atomare Resonanzfrequenz gefahren, dann erhält man transmittierte Intensitäten wie hier dargestellt. Haben die beiden Seitenbänder gleiche Transmission ($T_+ \approx T_-$), so ist $\Delta T = 0$ und die gemessene Intensität ist konstant ($I(t) \sim T_0^2 = \text{const.}$). Bei unterschiedlicher Transmission der Seitenbänder gilt $I(t) \sim T_0^2 + MT_0\Delta T \cos \omega_M t$.

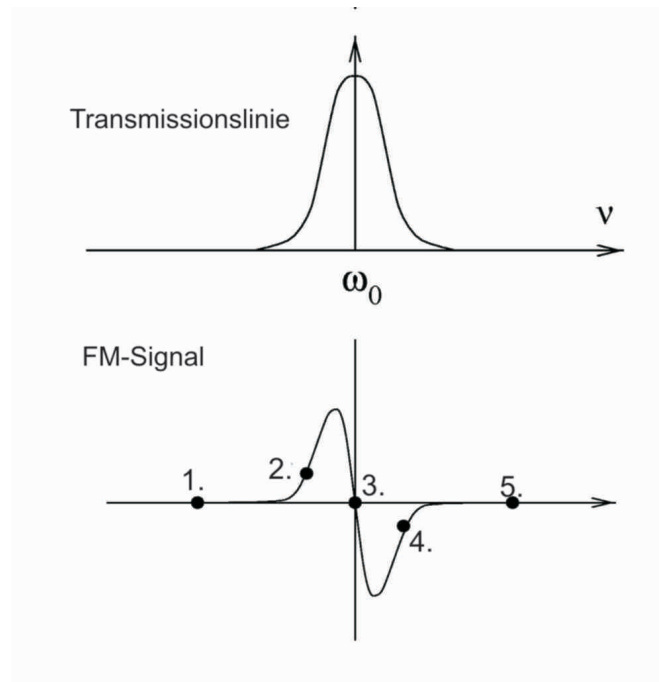


Abbildung 5.4: FM-Signal (die Nummerierung auf dem FM-Signal bezieht sich auf die Nummerierung von Abb. 5.3)

Aufgaben: *FM-Spektroskopie*

1. Frequenzmodulation des Resonators (5.2)
 - Vergleiche das FM-Signal mit dem DC-Signal aus der Photodiode!
 - Bei welcher Phasenverschiebung erscheint das Signal invertiert?
 - Finde eine Phasenverschiebung, bei der man die Ableitung des Transmissionssignals sieht!
2. Frequenzmodulationsspektroskopie an den atomaren Resonanzlinien (5.3)
 - Versuche, die Hyperfeinaufspaltung von Cs noch genauer auszumessen! (5.3.2)

5.2 Frequenzmodulation der Resonatortransmissionslinien

5.2.1 Aufbau

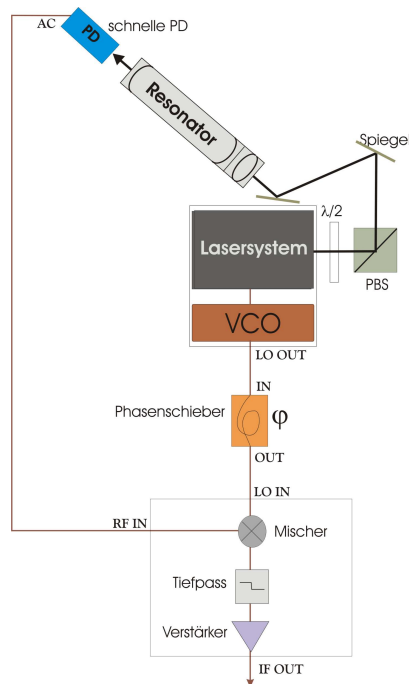


Abbildung 5.5: Aufbau für die RF-Spektroskopie an der Cavity

Hinter dem Resonator steht in diesem Versuchsteil die [schnelle Photodiode](#).

Der Laserfrequenz ω_T wird über den VCO ein Signal der Frequenz ω_M aufmoduliert. Die Frequenz und die Amplitude des VCOs sind einstellbar (siehe Kapitel 2 Resonator). Das Signal des VCOs, das man am „LO OUT“-Ausgang (LO=Local Oszillator) des VCO-Einschubs abgreifen kann, lässt man durch einen Phasenschieber (s. [Abb. 5.6](#)) laufen. Der Phasenschieber besteht aus unterschiedlich langen Koaxial-Kabeln, durch die das Signal verzögert wird. Pro Meter Koaxial-Kabel erfährt das Signal eine Phasenverschiebung von 5 ns. Über die Schalter kann man Kabel zu- oder abschalten und damit die zeitliche Verzögerung einstellen. Dieses Signal wird im Mischer mit dem AC-Signal der schnellen Photodiode gemischt. Im Mischer-Einschub werden die Signale gemischt und durchlaufen einen Tiefpass und einen Verstärker. Das FM-Spektroskopiesignal ist dann als Endsignal an „IF OUT“ abzugreifen.

5.2.2 Durchführung

Schaut euch das FM-Signal („IF OUT“) am Oszilloskop an und versucht es zu optimieren, indem ihr die Phasenverschiebung am Phasenschieber und die VCO-Frequenz ω_M verän-



Abbildung 5.6: Der Phasenschieber

dert.

5.3 Frequenzmodulationsspektroskopie der atomaren Resonanzlinien

5.3.1 Aufbau

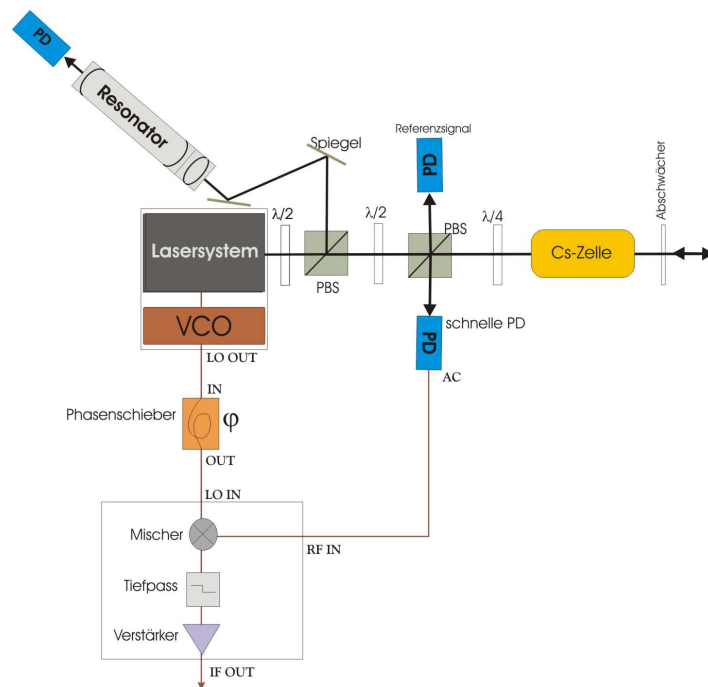


Abbildung 5.7: Aufbau für die FM-Spektroskopie

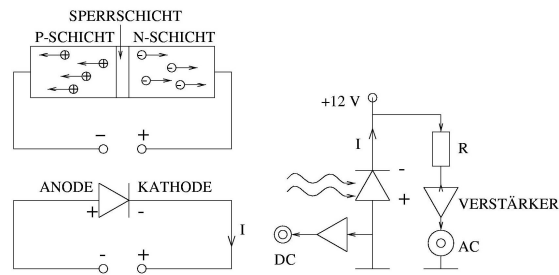


Abbildung 5.8: Beschaltung der schnellen Photodiode

Die schnelle Photodiode ist nun so aufzustellen, dass sie das Sättigungssignal empfängt. Hinter den Resonator stellen wir statt dessen eine „normale“ PD. Das Signal des DC-Ausgangs der schnellen PD wird wieder mit dem Math-Einschub optimiert. Das AC-Signal wird wie im vorigen Abschnitt mit dem VCO-Signal gemischt und man erhält das FM-Spektroskopiesignal. Vergleicht dieses Signal mit dem „normalen“ dopplerfreien Signal. Man kann bei den Lambdips und Cross-over-Resonanzen die erwarteten Nulldurchgänge im FM-Spektroskopiesignal erkennen. Dieses Signal kann wieder durch Verändern der Phase und der VCO-Frequenz optimiert werden.

5.3.2 Durchführung

Über die Abstände zwischen den Nulldurchgängen ist die Hyperfeinaufspaltung von Cs auszumessen. Leider ist diese Messung mit den im Praktikum zur Verfügung stehenden Geräten nicht unbedingt genauer als die normale dopplerfreie Messung, doch man erkennt auf alle Fälle, dass diese Messmethode eine sehr viel höhere Empfindlichkeit hat.

Kurzerklärungen

Schnelle Photodiode Im Gegensatz zur passiven Photodiode wird bei der schnellen Photodiode eine Spannung in Sperrrichtung angelegt. So beschaltet stellt die Sperrschicht des pn-Übergangs eine Kapazität dar, die zusammen mit dem Widerstand R die zeitliche Auflösung der Photodiode über $\tau = RC$ begrenzt (s. Abb. 5.8). Da diese Kapazität zu der beleuchteten Fläche proportional ist, haben die schnellen PD kleinere aktive Flächen als die passiven PD. Die Ladungsträger werden durch die angelegte Gegenspannung schnell abgeführt, wobei ein Strom I fließt. Da dieser Strom sehr klein ist, muss er verstärkt werden, um nachgewiesen werden zu können. Bei unserer schnellen Photodiode wird eine Gegenspannung von +12 V angelegt.

Herleitung der Formel 5.4: Der Träger und die Seitenbänder werden unterschiedlich transmittiert, je nachdem ob sie in der Resonanzfrequenz liegen oder nicht, und sie

haben auch eine „individuelle“ Phasenverschiebung. Daher gilt für die transmittierte Welle:

$$E_{\text{Trans}}(t) = E_0(T_0 e^{-i\phi_0} e^{i\omega_T t} - \frac{M}{2} T_{-1} e^{-i\phi_{-1}} e^{i(\omega_T - \omega_M)t} + \frac{M}{2} T_{+1} e^{-i\phi_{+1}} e^{i(\omega_T + \omega_M)t}) + c.c. \quad (5.5)$$

wobei $T_0 = e^{-\delta_0}$ der Transmissionskoeffizient für den Träger und $T_{\pm 1} = e^{-\delta_{\pm 1}}$ der für die Seitenbänder ist mit der frequenzabhängigen Dämpfung $\delta_j = \delta_j(\omega)$; und $\phi_j = \phi_j(\omega)$ die frequenzabhängige Phasenverschiebung ($j = 0$ für den Träger und $j = \pm 1$ für die Seitenbänder).

Wir messen mit der schnellen Photodiode die (gemittelte) Intensität des Lichtes $\langle I(t) \rangle = \langle \frac{c}{8\pi} |E(t)|^2 \rangle$. Da $M \ll 1$ dürfen wir die M^2 -Terme vernachlässigen. Alle Terme mit $e^{2\omega_T}$ verschwinden, da die Photodiode über die schnellen Frequenzen mittelt. Außerdem dürfen wir annehmen, dass $|\delta_0 - \delta_{+1}|, |\delta_0 - \delta_{-1}|, |\phi_0 - \phi_{+1}|$ und $|\phi_0 - \phi_{-1}|$ alle $\ll 1$. Dann erhalten wir für die Intensität (mit der Differenz der Absorption $\Delta T = T_+ - T_-$ und Differenz der relativen Phasenverschiebungen $\Delta\phi = (\phi_{+1} - \phi_0) + (\phi_{-1} - \phi_0)$):

$$\langle I(t) \rangle \propto T_0^2 - \frac{M}{2} T_0 T_{-1} (e^{i(\phi_{-1} - \phi_0)} e^{i\omega_M t} + e^{-i(\phi_{-1} - \phi_0)} e^{-i\omega_M t}) + \frac{M}{2} T_0 T_{+1} (e^{i(\phi_0 - \phi_{+1})} e^{i\omega_M t} + e^{-i(\phi_0 - \phi_{+1})} e^{-i\omega_M t}) \quad (5.6)$$

Taylorentwicklung von $e^{i(\phi_0 - \phi_{\pm 1})}$ liefert:

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle &\propto T_0^2 + MT_0 \Delta T \cos \omega_M t + MT_0 \sin \omega_M t (T_{-1}(\phi_0 - \phi_{-1}) + T_{+1}(\phi_0 - \phi_{+1})) \\ &\approx T_0^2 + MT_0 \Delta T \cos \omega_M t + MT_0 \sin \omega_M t (T_0(\phi_0 - \phi_{-1}) + T_0(\phi_0 - \phi_{+1})) \\ &= T_0^2 + MT_0 \Delta T \cos \omega_M t + MT_0^2 \Delta\phi \sin \omega_M t. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Man möchte das Signal der Photodiode demodulieren, um die $\cos \omega_M t$ - und $\sin \omega_M t$ -Abhängigkeit herausfiltern zu können. Dazu benutzt man in der Praxis einen Mischer (Abb. 5.2). Der Mischer „mischt“ das Signal der schnellen Photodiode mit dem Spannungssignal des VCO, das gegenüber dem PD-Signal eine Phasenverschiebung von φ hat. Man erhält:

$$\begin{aligned} U_{\text{MISCH}}(t) &\propto U_{\text{PD}}(t) \cdot U_{\text{VCO}}(t) \\ &\propto [-\Delta T M \cos(\omega_M t) + \Delta\phi M \sin(\omega_M t)] \cdot \cos(\omega_M t + \varphi) \\ &= M \left[-\frac{1}{2} \Delta T (\cos \varphi + \cos(2\omega_M t + \varphi)) + \frac{1}{2} \Delta\phi (\sin \varphi - \sin(2\omega_M t + \varphi)) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die hochfrequenten $2\omega_M$ -Anteile werden durch einen Tiefpass herausgefiltert, so dass man folgendes Endsignal erhält:

$$U_{\text{END}} \propto M\left[-\frac{1}{2}\Delta T \cos \varphi + \frac{1}{2}\Delta\phi \sin \varphi\right]. \quad (5.9)$$

Taylorentwicklung von ΔT liefert:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_{+1} - T_{-1} \\ &= T(\omega_T + \omega_M) - T(\omega_T - \omega_M) \\ &\approx T(\omega_T) + \frac{dT}{d\omega}\Big|_{\omega_T} \omega_M + \frac{1}{2} \frac{d^2T}{d\omega^2}\Big|_{\omega_T} \omega_M^2 - T(\omega_T) + \frac{dT}{d\omega}\Big|_{\omega_T} \omega_M - \frac{1}{2} \frac{d^2T}{d\omega^2}\Big|_{\omega_T} \omega_M^2 \\ &= \frac{dT}{d\omega}\Big|_{\omega_T} 2\omega_M. \end{aligned} \quad (5.10)$$

d. h. die Ableitung der Resonanzkurve. Wenn man nun $\Delta\phi$ taylorentwickelt, erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_{+1} + \phi_{-1} - 2\phi_0 \\ &= \phi(\omega_T + \omega_M) + \phi(\omega_T - \omega_M) - 2\phi(\omega_T) \\ &\approx \phi(\omega_T) + \frac{d\phi}{d\omega}\Big|_{(\omega_T)}\omega_M + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{d\omega^2}\Big|_{(\omega_M)}\omega_M^2 + \phi(\omega_T) - \frac{d\phi}{d\omega}\Big|_{(\omega_T)}\omega_M + \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{d\omega^2}\Big|_{(\omega_T)}\omega_M^2 - 2\phi(\omega_T) \\ &= \frac{d^2\phi}{d\omega^2}\Big|_{(\omega_T)} \omega_M^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$\Delta\phi$ ist also proportional zur 2. Ableitung der Dispersion.

Literatur

- [Davis] C. C. Davis, *Lasers and Electro-Optics: Fundamentals and Engineering*, Cambridge University Press (1995).
- [Dem] W. Demtröder *Laserspektroskopie*, Springer-Verlag, 4.Auflage (2000). [1.1](#), [2.1](#), [4.1](#)
- [Dem 3] W. Demtröder *Experimentalphysik 3, Atome, Moleküle und Festkörper*, Springer-Verlag, 2.Auflage (2000) [1.1](#), [3.1.3](#), [4.1](#)
- [Gerth] C. Gerthsen, H. Vogel *Physik*, Springer-Verlag, 18.Auflage (1995)
- [Hak-Wol] H. Haken, H. C. Wolf *Atom- und Quantenphysik*, Springer-Verlag, 7. Auflage (2000) [1.1](#), [3.1.2](#), [4.1](#)
- [Hecht] E. Hecht *Optik*, Addison-Wesley (1994) [5.3.1](#)
- [Kneu] F.K. Kneubühl, M.W. Sigrist *Laser*, Teubner Studienbücher Physik (1999) [1.1](#)
- [May-Kuck] T. Mayer-Kuckuk *Atomphysik*, Teubner Studienbücher Physik (1985) [1.1](#), [3.1.2](#)
- [Mesch] D. Meschede *Optik, Licht und Laser*, Teubner Studienbücher Physik (1999). [1.1](#), [2.1](#), [3.1.3](#)
- [Sieg] Siegmann *Laser*, University Science Books (1986)
- [Winn] A. A. Winnacker *Physik von Maser und Laser*, BI, Mannheim (1984) [1.1](#)