Kosmologie I

Thorben Kröger

Juni 2008

Kosmologie

Kosmos

griech. $\kappa\acute{o}\sigma\mu o\varsigma$, Weltall; Schmuck, Ordnung.

Grundlegende Fragen der Kosmologie

- Woraus besteht das Universum?
- Ist das Universum unendlich oder endlich ausgedehnt?
- Gibt es einen Beginn des Universums?
- Wird das Universum jemals aufhören zu existieren?

Olbers Paradoxon

Olbers Paradoxon

Olbers Paradoxon (1826)

Warum ist der Nachthimmel dunkel? Da es überall im Universum Sterne gibt, müsste jede Blickrichtung auf einer Sternoberfläche enden, und der Himmel wäre Sonnenhell

Olbers Paradoxon

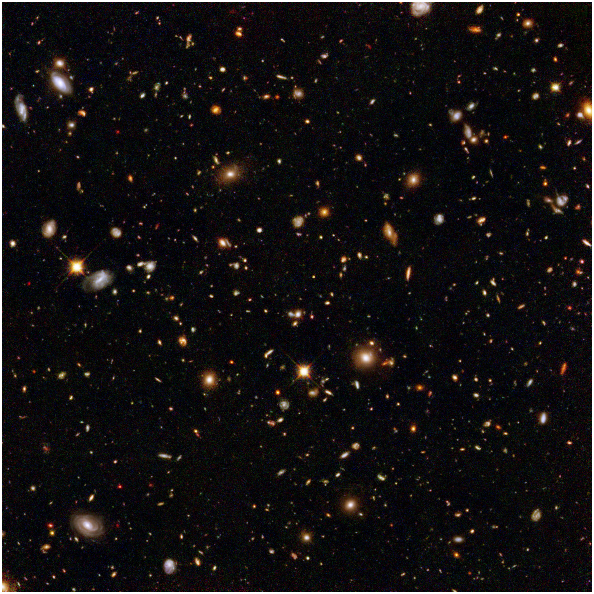
Olbers Paradoxon (1826)

Warum ist der Nachthimmel dunkel? Da es überall im Universum Sterne gibt, müsste jede Blickrichtung auf einer Sternoberfläche enden, und der Himmel wäre Sonnenhell

Annahmen:

- Anzahldichte n der Sterne und Leuchtkraft L im ganzen Universum konstant
- Das Universum ist unendlich groß
- Das Universum ist unendlich alt
- Fluß gegeben durch $f \propto 1/r^2$

Homogenes und isotropes Universum



Homogenes und isotropes Universum

Homogenes und isotropes Universum

Definition (Kosmologisches Prinzip)

Das Universum ist *isotrop* und *homogen* auf *großen Skalen*.

Große Skalen: $> 100 Mpc$ (Größe der Supercluster and der großen Leeren)

Homogenes und isotropes Universum

Definition (Kosmologisches Prinzip)

Das Universum ist *isotrop* und *homogen* auf *großen Skalen*.

Definition (homogen)

Es gibt keine bevorzugten *Orte* im Universum; es sieht von jedem Punkt aus betrachtet gleich aus

Große Skalen: $> 100 Mpc$ (Größe der Supercluster and der großen Leeren)

Homogenes und isotropes Universum

Definition (Kosmologisches Prinzip)

Das Universum ist *isotrop* und *homogen* auf *großen Skalen*.

Definition (homogen)

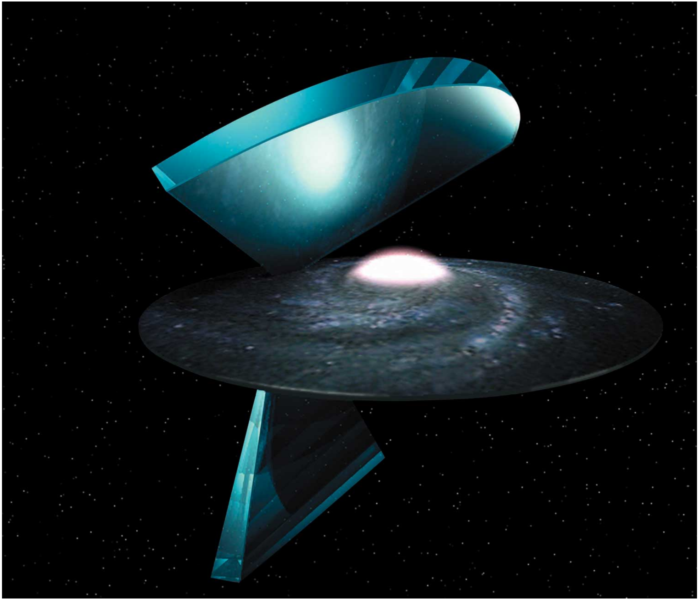
Es gibt keine bevorzugten *Orte* im Universum; es sieht von jedem Punkt aus betrachtet gleich aus

Definition (isotrop)

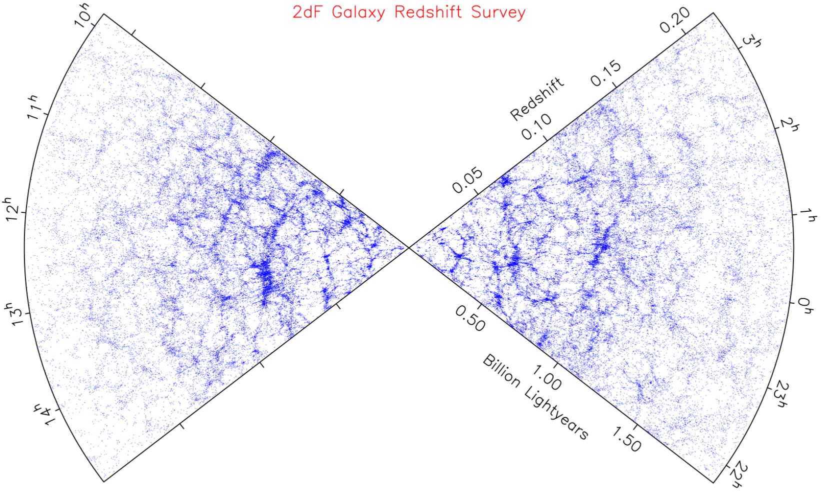
Es gibt keine bevorzugten *Richtungen* im Universum

Große Skalen: $> 100 Mpc$ (Größe der Supercluster and der großen Leeren)

2dF Galaxy Redshift Survey



2dF Galaxy Redshift Survey



Hubble Gesetz

Definition (Rotverschiebung)

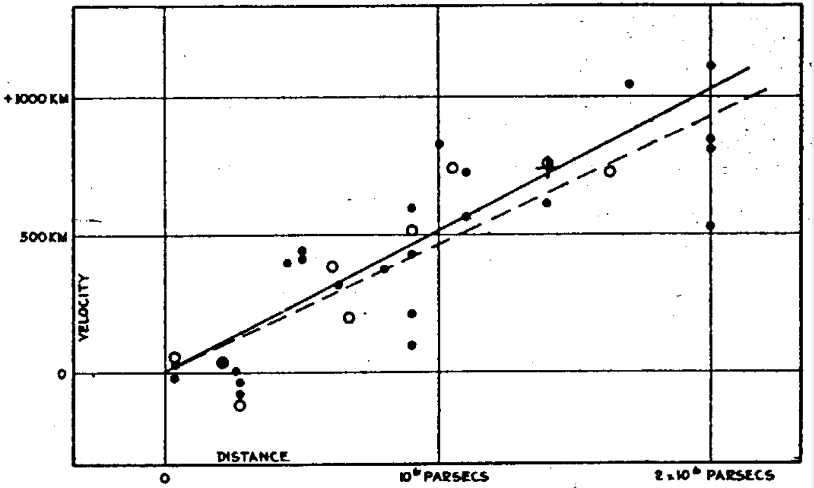
$$z \equiv \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

Fundamentale Beobachtung: Bis auf wenige Ausnahmen entfernen sich alle Galaxien von uns.

Hubble Gesetz

Hängt die Rotverschiebung von der Entfernung ab?

Hubble Diagramm im Original



Hubble Gesetz

Hubble Gesetz

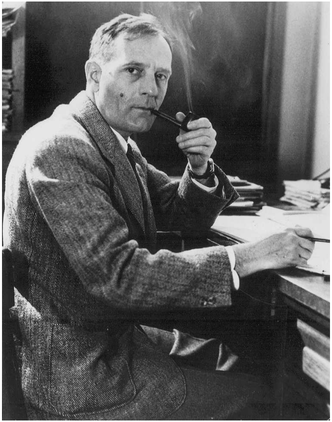
$$z = \frac{H_0}{c} r$$

nichtrelativistische Dopplerverschiebung: $z = v/c$

$$v = H_0 r$$

Hubble Konstante

$$H_0 = (70 \pm 7)\mathrm{km/s/Mpc}$$



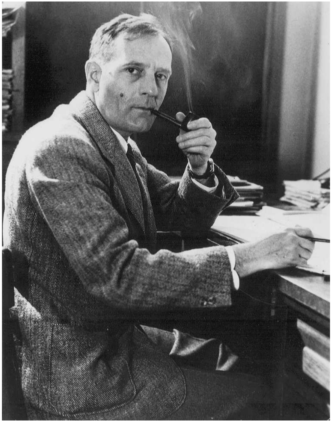
Hubble Gesetz

Hubble Zeit

Falls die relativen Geschwindigkeiten der Galaxien konstant waren, gibt es eine Zeit, in der sich alle auf einem Punkt befanden

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1}$$
$$= (14.0 \pm 1.4)\mathrm{Gyr}$$

Das Universum kann jünger sein (Gravitation verlangsamt die Ausdehnung) oder älter (kosmologische Konstante beschleunigt die Ausdehnung)

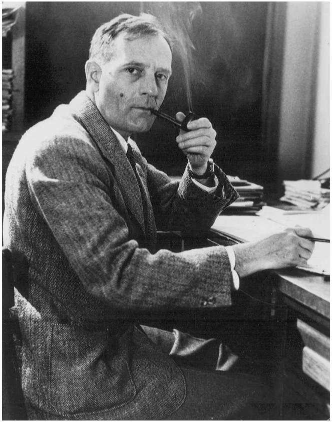


Hubble Gesetz

Hubble Entfernung

$$d_H = ct_0 = \frac{c}{H_0}$$
$$= (4300 \pm 400)\mathrm{Mpc}$$

d_H definiert eine natürliche Entfernungsskala, es ist die größte Entfernung die ein Photon während der bisherigen Lebenszeit des Universum zurücklegen kann

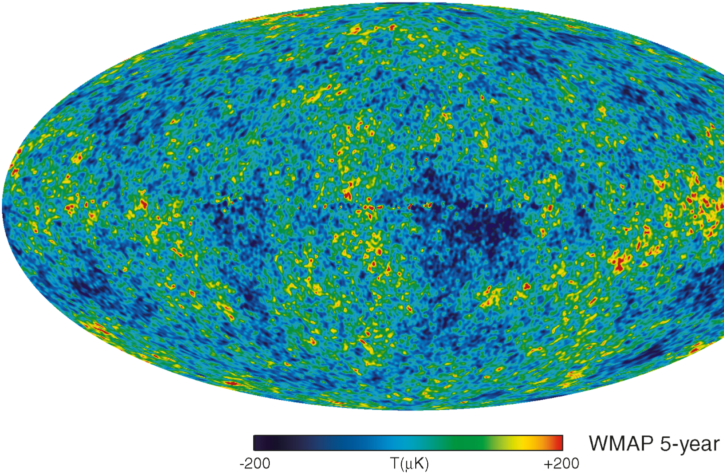


Hubble Gesetz

Zwei Erklärungsversuche:

- *Big Bang* Modell
- *Steady State* Modell

Kosmische Hintergrundstrahlung



Kosmische Hintergrundstrahlung

- $T_0 = 2.725 \pm 0.001\mathrm{K}$ (Schwarzkörperstrahlung)
- $\epsilon_\gamma 4.17 \cdot 10^{-14}\mathrm{J}/\mathrm{m}^3$ (Energiedichte)
- $n_\gamma = 4.11 \cdot 10^8/\mathrm{m}^3$ (Anzahldichte Photonen)
- $\langle E \rangle = 6.34 \cdot 10^{-4}\mathrm{eV}$ (mittlere Energie)

Hubble Gesetz

Erklärungsversuch:

- Big Bang Modell

Geometrie eines Universums

Auf kosmologischen Skalen ist die *Gravitation* die dominierende Kraft.

Auf kosmologischen Skalen ist die *Gravitation* die dominierende Kraft.

Newton:

Masse sagt der Gravitation wie eine Kraft ausgeübt wird

$(F = -Gma/r^2)$

Die Kraft sagt der Masse wie sie sich zu beschleunigen hat

$(F = ma)$

Auf kosmologischen Skalen ist die *Gravitation* die dominierende Kraft.

Newton:

Masse sagt der Gravitation wie eine Kraft ausgeübt wird ($F = -Gma/r^2$)

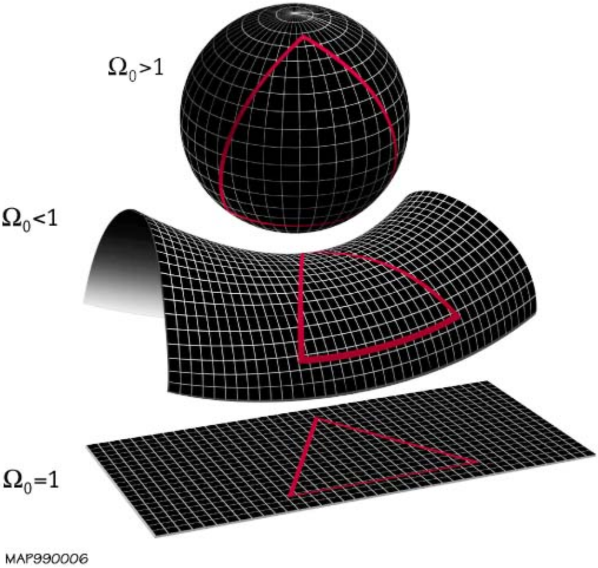
Die Kraft sagt der Masse wie sie sich zu beschleunigen hat ($F = ma$)

Einstein:

Masse/Energie sagt der Raumzeit wie sie sich zu krümmen hat

Die gekrümmte Raumzeit sagt der Masse/Energie wie sie sich bewegen soll

Geometrie eines Universums



Robertson-Walker Metrik

Definition (Minkowski Metrik)

Spezielle Relativitätstheorie: Die Raumzeit ist flach.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

mit $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Robertson-Walker Metrik

Howard P. Robertson

Arthur G. Walker

Georges Lemaître

Alexander Friedmann

Robertson-Walker Metrik

Metrik für ein *homogenes*, *isotropes* Universum, in dem sich Entfernungen als Funktion der Zeit ändern können

Definition (Robertson-Walker Metrik)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2\right]$$

- $S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) & \kappa = +1 \\ r & \kappa = 0 \\ R_0 \sinh(r/R_0) & \kappa = -1 \end{cases}$
- $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.
- $a(t)$ *Skalenfaktor*
- $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ *Krümmungskonstante*
- R_0 *Krümmungsradius*
- (r, θ, ϕ) *kovarianten Koordinaten* unabhängig von der Zeit.

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$
$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c \int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c\frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_e+\frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_0}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c\frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_e+\frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_0}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{1}{a(t)}\int_{t_e}^{t_e+\frac{\lambda_e}{c}} dt = \frac{1}{a(t_0)}\int_{t_0}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} dt$$

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c\frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e+\frac{\lambda_e}{c}}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c\int_{t_e}^{t_e+\frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_0}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{1}{a(t)}\int_{t_e}^{t_e+\frac{\lambda_e}{c}} dt = \frac{1}{a(t_0)}\int_{t_0}^{t_0+\frac{\lambda_0}{c}} dt$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}$$

mit $z = (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ folgt

Robertson-Walker Metrik

Licht bewegt sich entlang einer Geodäte mit $ds^2 = 0$. In einem homogenen, isotropen Universum gibt es keinen Grund für $d\phi \neq 0, d\theta \neq 0$. Also:

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2$$

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$c \int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{1}{a(t)} \int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} dt$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}$$

mit $z = (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ folgt

$z(a)$

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}$$

Robertson-Walker Metrik

Entfernung, die das Licht in der Zeit von t_e bis t_0 zurückgelegt hat

$$r = \int_{t_e}^{r_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

Robertson-Walker Metrik

Entfernung, die das Licht in der Zeit von t_e bis t_0 zurückgelegt hat

$$r = \int_{t_e}^{r_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$L \approx dl = cdt$$

Robertson-Walker Metrik

Entfernung, die das Licht in der Zeit von t_e bis t_0 zurückgelegt hat

$$r = \int_{t_e}^{r_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$L \approx dl = cdt$$

$$z = \frac{a(t)}{a(t_0 - dt)} - 1 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}dt} - 1 \approx \frac{\dot{a}(t_0)}{(t_0)} dt$$

Robertson-Walker Metrik

Entfernung, die das Licht in der Zeit von t_e bis t_0 zurückgelegt hat

$$r = \int_{t_e}^{r_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$L \approx dl = cdt$$

$$z = \frac{a(t)}{a(t_0 - dt)} - 1 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}dt} - 1 \approx \frac{\dot{a}(t_0)}{(t_0)} dt$$

$$\Rightarrow z \approx \frac{\dot{a}}{a} \frac{L}{c}$$

Robertson-Walker Metrik

Entfernung, die das Licht in der Zeit von t_e bis t_0 zurückgelegt hat

$$r = \int_{t_e}^{r_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$L \approx dl = cdt$$

$$z = \frac{a(t)}{a(t_0 - dt)} - 1 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}dt} - 1 \approx \frac{\dot{a}(t_0)}{(t_0)} dt$$

$$\Rightarrow z \approx \frac{\dot{a}}{a} \frac{L}{c}$$

Hubble Parameter

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}$$

Friedmann Gleichung: Motivation

Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche einer homogenen Kugel mit Masse M_s und Radius $R_s(t)$:

$$\ddot{R}_s = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

Friedmann Gleichung: Motivation

Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche einer homogenen Kugel mit Masse M_s und Radius $R_s(t)$:

$$\ddot{R}_s = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

$$\int \ddot{R}_s \, dt = \int -\frac{GM_s}{R_s(t)^2} \, dt$$

Friedmann Gleichung: Motivation

Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche einer homogenen Kugel mit Masse M_s und Radius $R_s(t)$:

$$\ddot{R}_s = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

$$\int \ddot{R}_s \, dt = \int -\frac{GM_s}{R_s(t)^2} \, dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{R}_s^{\,2}}_{E_{kin}} = \underbrace{\frac{GM_s}{R_s(t)}}_{-E_{pot}} + U$$

Friedmann Gleichung: Motivation

Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche einer homogenen Kugel mit Masse M_s und Radius $R_s(t)$:

$$\ddot{R}_s = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

$$\int \ddot{R}_s \, dt = \int -\frac{GM_s}{R_s(t)^2} \, dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{R}_s^{\,2}}_{E_{kin}} = \underbrace{\frac{GM_s}{R_s(t)}}_{-E_{pot}} + U$$

mit $M_s = 4\pi/3\rho(t)R_s(t)^3$ und $R_s(t) = a(t)R_0$:

$$\frac{1}{2}R_0^2\dot{a} = \frac{4\pi}{3}GR_0^2\rho(t)a(t)^2 + U$$

Friedmann Gleichung: Motivation

Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche einer homogenen Kugel mit Masse M_s und Radius $R_s(t)$:

$$\ddot{R}_s = -\frac{GM_s}{R_s(t)^2}$$

$$\int \ddot{R}_s \, dt = \int -\frac{GM_s}{R_s(t)^2} \, dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{R}_s{}^2}_{E_{kin}} = \underbrace{\frac{GM_s}{R_s(t)}}_{-E_{pot}} + U$$

mit $M_s = 4\pi/3\rho(t)R_s(t)^3$ und $R_s(t) = a(t)R_0$:

$$\frac{1}{2}R_0^2\dot{a} = \frac{4\pi}{3}GR_0^2\rho(t)a(t)^2 + U$$

teilen durch $R_0^2 a^2/2$ ergibt:

Friedmann Gleichung (in Newton Form)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Friedmann Gleichung: relativistisch

Friedmann Gleichung (in Newton Form)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{2U}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Friedmann Gleichung (in relativistischer Form)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Friedmann Gleichung

$$\kappa = 0 \Leftrightarrow \epsilon_{\text{crit}} = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$$

$\epsilon > \epsilon_{\text{crit}}$ positive, $\epsilon < \epsilon_{\text{crit}}$ negative Krümmung.

Definition (Dichteparameter)

$$\Omega(t) = \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_{\text{crit}}}$$

$$\epsilon_{\text{crit},0} = (5200 \pm 1000)\mathrm{MeV}/\mathrm{m}^3 \hat{=} \frac{1H}{200\mathrm{l}}$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$R_s(t) = a(t)R_0$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$
$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a})$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$

$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$

$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$$E(t) = V(t)\epsilon(t)$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$
$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3(3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$$E(t) = V(t)\epsilon(t)$$
$$\dot{E}(t) = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$
$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$$E(t) = V(t)\epsilon(t)$$
$$\dot{E}(t) = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon$$
$$= V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\right)$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$\begin{aligned} R_s(t) &= a(t)R_0 \\ V(t) &= \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3 \\ \dot{V}(t) &= \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(t) &= V(t)\epsilon(t) \\ \dot{E}(t) &= V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon \\ &= V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\right) \end{aligned}$$

$$\dot{E} + P\dot{V} = 0 \Leftrightarrow V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P\right) = 0$$

Energieerhaltung

$dQ = dE + pdV = 0$, da $S = dQ/T = 0$ im homogenen, isotropen Universum. $\Rightarrow \dot{E} + P\dot{V} = 0$.

$$R_s(t) = a(t)R_0$$
$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 a(t)^3$$
$$\dot{V}(t) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (3a^2\dot{a}) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right)$$

$$E(t) = V(t)\epsilon(t)$$
$$\dot{E}(t) = V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon$$
$$= V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon\right)$$

$$\dot{E} + P\dot{V} = 0 \Leftrightarrow V\left(\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}\epsilon + 3\frac{\dot{a}}{a}P\right) = 0$$

Energieerhaltung

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0$$

Beschleunigungsgleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad \Big| \cdot a^2$$

Beschleunigungsgleichung

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad &\Big|\cdot a^2 \\
\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t)a(t)^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \qquad &\Big|\frac{d}{dt}
\end{aligned}
$$

Beschleunigungsgleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} \qquad \left| \cdot a^2 \right.$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t)a(t)^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} \qquad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}\right) \qquad |: 2a\dot{a}$$

Beschleunigungsgleichung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} && \Big| \cdot a^2 \\
\dot a^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t)a(t)^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} && \Big| \frac{d}{dt} \\
2\dot a \ddot a &= \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot\epsilon a^2 + 2\epsilon a \dot a\right) && \Big| : 2a\dot a \\
\frac{\ddot a}{a} &= \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot\epsilon \frac{a}{\dot a} + 2\epsilon\right) && \Big| \dot\epsilon \frac{a}{\dot a} = -3(\epsilon + P)
\end{aligned}$$

Beschleunigungsgleichung

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} && \Big| \cdot a^2 \\
\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t)a(t)^2 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2} && \Big| \frac{d}{dt} \\
2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}a^2 + 2\epsilon a\dot{a}\right) && \Big|: 2a\dot{a} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} + 2\epsilon\right) && \Big| \dot{\epsilon}\frac{a}{\dot{a}} = -3(\epsilon + P)
\end{aligned}
$$

Beschleunigungsgleichung

$$
\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)
$$

Zustandsgleichungen

$P = P(\epsilon)$. Betrachte den linearen Fall: $P = \omega\epsilon$

Zustandsgleichungen

$P = P(\epsilon)$. Betrachte den linearen Fall: $P = \omega\epsilon$

nichtrelativistische Zustandsgleichung

- Ideales Gas:
  $PV = NkT \Leftrightarrow P = \rho/\mu kT$.
  Energiedichte: $\epsilon \approx \rho c^2$
- $P \approx \frac{kT}{\mu c^2}\epsilon$
- mit $\mu\left\langle v^2\right\rangle = 3KT$

$P(\epsilon)$ für nichtrel. Gas

$$P_{nonrel} = \frac{\left\langle v^2\right\rangle}{3c^2}\epsilon_{nonrel} \approx 0$$

Zustandsgleichungen

$P = P(\epsilon)$. Betrachte den linearen Fall: $P = \omega\epsilon$

nichtrelativistische Zustandsgleichung

- Ideales Gas:
  $PV = NkT \Leftrightarrow P = \rho/\mu kT$.
  Energiedichte: $\epsilon \approx \rho c^2$
- $P \approx \frac{kT}{\mu c^2}\epsilon$
- mit $\mu \left\langle v^2 \right\rangle = 3KT$

$P(\epsilon)$ für nichtrel. Gas

$$P_{nonrel} = \frac{\left\langle v^2 \right\rangle}{3c^2}\epsilon_{nonrel} \approx 0$$

relativistische Zustandsgleichung

- $\left\langle v^2 \right\rangle \approx c^2$

$P(\epsilon)$ für rel. Gas

$$P_{rel} = \frac{1}{3}\epsilon_{rel}$$

Friedmann Gleichungen

Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Zustandsgleichung

$$P = \omega\epsilon$$

Energieerhaltung

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0$$

Beschleunigungsgleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)$$

Friedmann Gleichungen mit Λ

Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Zustandsgleichung

$$P = \omega\epsilon$$

Energieerhaltung

$$\dot{\epsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0$$

Beschleunigungsgleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

Friedmann Gleichungen mit Λ

Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\epsilon(t) + \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda\right) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}\frac{1}{a(t)^2}$$

Zustandsgleichung

$$P = \omega\epsilon \; (\omega_\Lambda = -1)$$

Energieerhaltung für Λ

$$P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

Beschleunigungsgleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\epsilon + 3P)$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_\omega \epsilon_\omega, \qquad P = \sum_\omega P_\omega = \sum_\omega \omega \epsilon_\omega$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_{\omega} \epsilon_{\omega}, \qquad P = \sum_{\omega} P_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \epsilon_{\omega}$$

Die Energieerhaltung gilt für jede Komponente, solange keine Wechselwirkung zwichen ihnen besteht

$$\dot{\epsilon}_{\omega} + \frac{3\dot{a}}{a} \underbrace{(\epsilon_{\omega} + \overbrace{\ P\ })}_{} = 0 \quad \forall \omega$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_\omega \epsilon_\omega, \qquad P = \sum_\omega P_\omega = \sum_\omega \omega\epsilon_\omega$$

Die Energieerhaltung gilt für jede Komponente, solange keine Wechselwirkung zwichen ihnen besteht

$$\dot{\epsilon}_\omega + \frac{3\dot{a}}{a} \underbrace{(\epsilon_\omega + \overbrace{P}^{\omega\epsilon_\omega})} = 0 \quad \forall\omega$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_{\omega} \epsilon_{\omega}, \qquad P = \sum_{\omega} P_{\omega} = \sum_{\omega} \omega \epsilon_{\omega}$$

Die Energieerhaltung gilt für jede Komponente, solange keine Wechselwirkung zwichen ihnen besteht

$$\dot{\epsilon}_{\omega} + \frac{3\dot{a}}{a} \underbrace{(\epsilon_{\omega} + \overbrace{P}^{\omega\epsilon_{\omega}})}_{(1+\omega)\epsilon_{\omega}} = 0 \quad \forall \omega$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_{\omega} \epsilon_\omega, \qquad P = \sum_{\omega} P_\omega = \sum_{\omega} \omega \epsilon_\omega$$

Die Energieerhaltung gilt für jede Komponente, solange keine Wechselwirkung zwichen ihnen besteht

$$\dot{\epsilon}_\omega + \frac{3\dot{a}}{a} \underbrace{(\epsilon_\omega + \overbrace{P}^{\omega\epsilon_\omega})}_{(1+\omega)\epsilon_\omega} = 0 \quad \forall \omega$$

$$\frac{d\epsilon_\omega}{dt} = -3 \frac{da}{dt} \frac{1}{a} (1+\omega)\epsilon_\omega$$

$\epsilon(t)$

Mehrere Beiträge zur Energiedichte:

$$\epsilon \sum_\omega \epsilon_\omega, \qquad P = \sum_\omega P_\omega = \sum_\omega \omega\epsilon_\omega$$

Die Energieerhaltung gilt für jede Komponente, solange keine Wechselwirkung zwichen ihnen besteht

$$\dot{\epsilon}_\omega + \frac{3\dot{a}}{a} \underbrace{(\epsilon_\omega + \overbrace{P}^{\omega\epsilon_\omega})}_{(1+\omega)\epsilon_\omega} = 0 \quad \forall\omega$$

$$\frac{d\epsilon_\omega}{dt} = -3\frac{da}{dt}\frac{1}{a}(1+\omega)\epsilon_\omega$$

$$\frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{da}{a}$$

$\epsilon(t)$

$\frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{da}{a} \Leftrightarrow \ln(\epsilon_\omega) = -3(1+\omega)\ln(a) \Leftrightarrow$

$\epsilon_\omega(t)$

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+\omega)}$$

$\epsilon(t)$

$\frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{da}{a} \Leftrightarrow \ln(\epsilon_\omega) = -3(1+\omega)\ln(a) \Leftrightarrow$

$\epsilon_\omega(t)$

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+\omega)}$$

$\epsilon_m(t)$ (nichtrelativistische Materie, $\omega = 0$)

$$\epsilon_m(a) = \epsilon_{m,0} \cdot a^{-3}$$

$\epsilon(t)$

$$\frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{da}{a} \Leftrightarrow \ln(\epsilon_\omega) = -3(1+\omega)\ln(a) \Leftrightarrow$$

$\epsilon_\omega(t)$

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+\omega)}$$

$\epsilon_m(t)$ (nichtrelativistische Materie, $\omega = 0$)

$$\epsilon_m(a) = \epsilon_{m,0} \cdot a^{-3}$$

$\epsilon_r(t)$ (Strahlung (relativistische Materie), $\omega = 1/3$)

$$\epsilon_r(a) = \epsilon_{r,0} \cdot a^{-4}$$

$\epsilon(t)$

$$\frac{d\epsilon_\omega}{\epsilon_\omega} = -3(1+\omega)\frac{da}{a} \Leftrightarrow \ln(\epsilon_\omega) = -3(1+\omega)\ln(a) \Leftrightarrow$$

$\epsilon_\omega(t)$

$$\epsilon_\omega(a) = \epsilon_{\omega,0} \cdot a^{-3(1+\omega)}$$

$\epsilon_m(t)$ (nichtrelativistische Materie, $\omega = 0$)

$$\epsilon_m(a) = \epsilon_{m,0} \cdot a^{-3}$$

$\epsilon_r(t)$ (Strahlung (relativistische Materie), $\omega = 1/3$)

$$\epsilon_r(a) = \epsilon_{r,0} \cdot a^{-4}$$

$\epsilon_c(t)$ (Kosmologische Konstante Λ, $\omega = -1$)

$$\epsilon_c(a) = \text{const}$$

$\epsilon(t)$

- Die Energiedichte von *Materie* nimmt mit $1/a^3$ ab:
  $\epsilon_m = nE = n(mc^2) \propto a^{-3}$

$\epsilon(t)$

- Die Energiedichte von *Materie* nimmt mit $1/a^3$ ab:
  $\epsilon_m = nE = n(mc^2) \propto a^{-3}$
- Die Energiedichte von *Strahlung* nimmt mit $1/a^4$ ab:
  $E = hc/\lambda \propto a^{-1}$, also $\epsilon_r = n(hc/\lambda) \propto a^{-3}a^{-1} \propto a^{-4}$

$\epsilon(t)$

- Die Energiedichte von *Materie* nimmt mit $1/a^3$ ab:
  $\epsilon_m = nE = n(mc^2) \propto a^{-3}$
- Die Energiedichte von *Strahlung* nimmt mit $1/a^4$ ab:
  $E = hc/\lambda \propto a^{-1}$, also $\epsilon_r = n(hc/\lambda) \propto a^{-3}a^{-1} \propto a^{-4}$

Aber Photonen werden ständig erzeugt oder zerstört!

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{\text{Sternenlicht}}/\epsilon_{CMB} \approx 0.1$$

Dichteparameter

Dichteparameter Materie

$$\Omega_{m,0} \approx 0.3$$

Dichteparameter

Dichteparameter Materie

$$\Omega_{m,0} \approx 0.3$$

Dichteparameter Strahlung

$$\Omega_{r,0} \approx 8.4 \cdot 10^{-5}$$

Dichteparameter

Dichteparameter Materie

$$\Omega_{m,0} \approx 0.3$$

Dichteparameter Strahlung

$$\Omega_{r,0} \approx 8.4 \cdot 10^{-5}$$

Dichteparameter Λ

$$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$$

Einfache Universen

Friedmann Gleichung:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

Leeres Universum ($\Omega \ll 1$)

In einem leeren Universum gibt es keinen Beitrag zu ϵ:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

Leeres Universum ($\Omega \ll 1$)

In einem leeren Universum gibt es keinen Beitrag zu ϵ:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$a(t)$ für $\Omega \ll 1$

$$a(t) = \begin{cases} \text{const} & \text{und } \kappa = 0 \\ \frac{t}{t_0} & \text{und } \kappa = -1 \end{cases}$$

mit $t_0 = R_0/c = H_0^{-1}$.

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Exponentenvergleich

$$2q - 2 = -(1 + 3w)q$$
$$q = \frac{2}{3 + 3\omega}$$

Flaches Universum $(\kappa = 0, \omega \neq -1)$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Exponentenvergleich

$$2q - 2 = -(1 + 3w)q$$
$$q = \frac{2}{3 + 3\omega}$$

$$\left(\frac{q}{t_0}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2}$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Exponentenvergleich

$$2q - 2 = -(1+3w)q$$

$$q = \frac{2}{3+3\omega}$$

$$\left(\frac{q}{t_0}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2}$$

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega} \sqrt{\frac{c^2}{6\pi G \epsilon_0}}$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Exponentenvergleich

$$2q - 2 = -(1 + 3w)q$$
$$q = \frac{2}{3 + 3\omega}$$

$$\left(\frac{q}{t_0}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2}$$

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega}\sqrt{\frac{c^2}{6\pi G \epsilon_0}}$$
$$= \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}$$

mit $H_0 \equiv \frac{\dot{a}}{a}\Big|_{t_0}$.

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega \neq -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_0 a^{-1-3\omega}$$

Ansatz: $a(t) = (t/t_0)^q$

$$\frac{q^2}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2q-2} = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(1+3\omega)q}$$

Exponentenvergleich

$$2q - 2 = -(1 + 3w)q$$
$$q = \frac{2}{3 + 3\omega}$$

$$\left(\frac{q}{t_0}\right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon_0}{3c^2}$$

$$t_0 = \frac{1}{1+\omega} \sqrt{\frac{c^2}{6\pi G \epsilon_0}} = \frac{2}{3(1+\omega)} H_0^{-1}$$

mit $H_0 \equiv \frac{\dot{a}}{a}\Big|_{t_0}$.

$a(t)$, $\kappa = 0, \omega \neq -1$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3\omega)}$$

Flaches Universum $(\kappa = 0, \omega = -1)$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \epsilon_\Lambda}{3c^2} a^2$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega = -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \epsilon_\Lambda}{3c^2} a^2$$

$$\dot{a} = \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G \epsilon_\Lambda}{3c^2}}}_{H_0} a$$

Flaches Universum ($\kappa = 0, \omega = -1$)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \epsilon_\Lambda}{3c^2} a^2$$

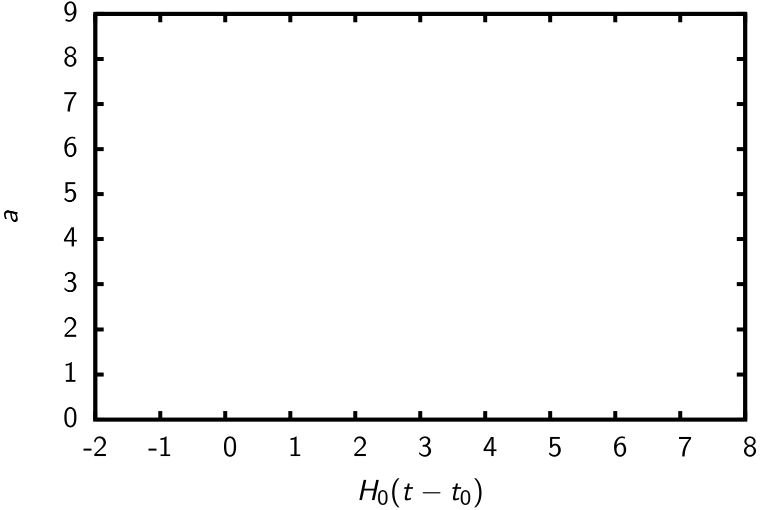
$$\dot{a} = \underbrace{\sqrt{\frac{8\pi G \epsilon_\Lambda}{3c^2}}}_{H_0} a$$

$a(t)$ für $\kappa = 0, \omega = -1$

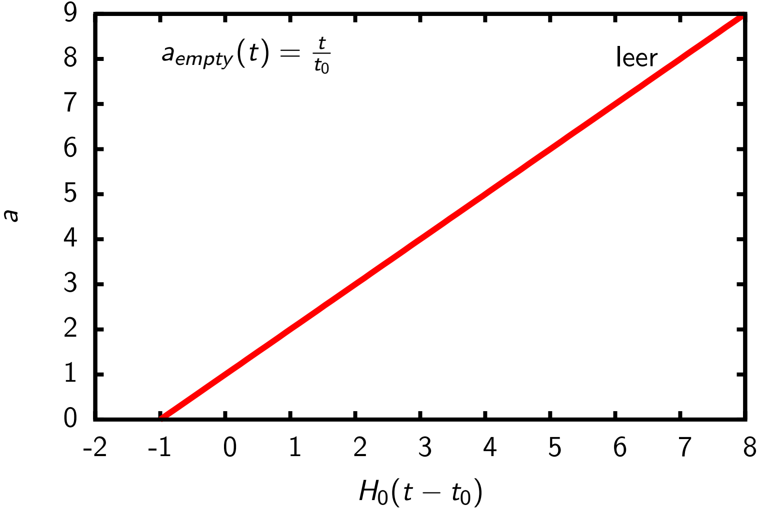
$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$$

Ein Λ-Universum ist unendlich alt.

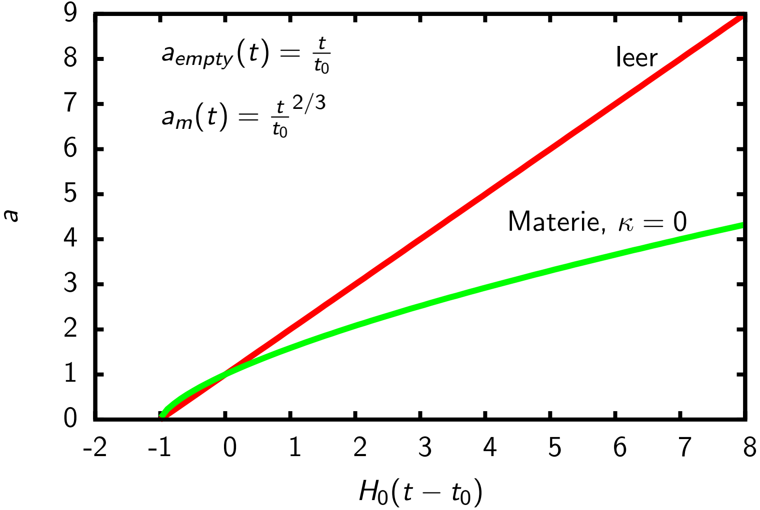
Einfache Universen

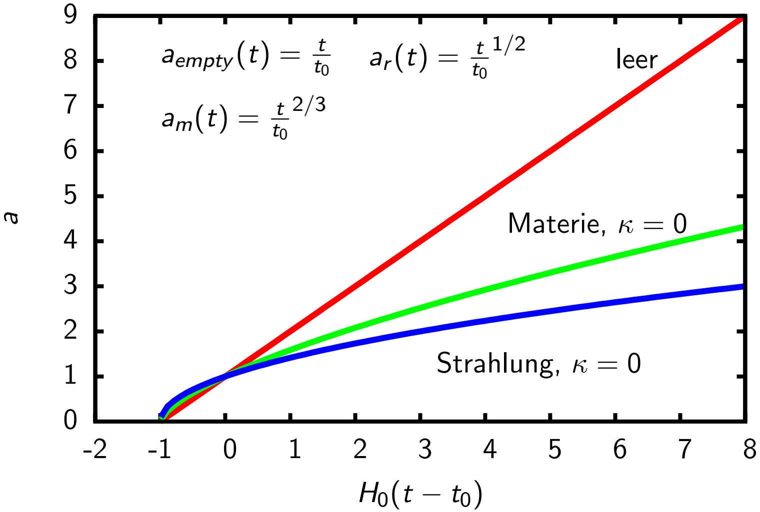


Einfache Universen



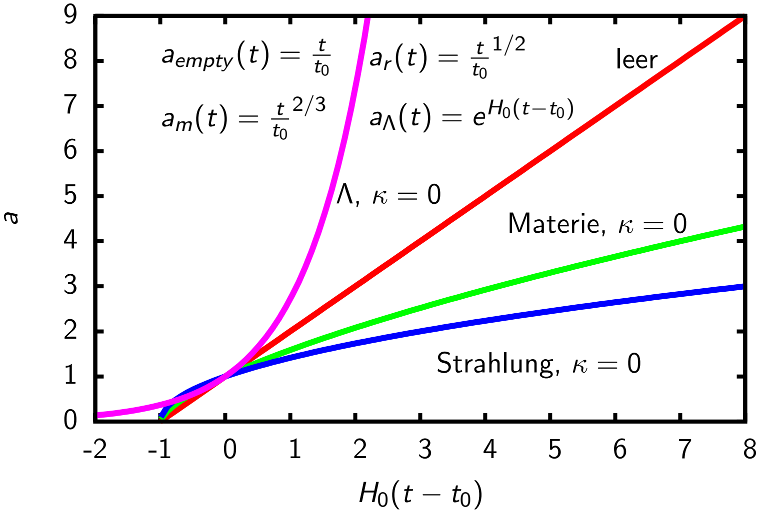
Einfache Universen





$a_{empty}(t) = \frac{t}{t_0}$
$a_r(t) = \frac{t}{t_0}^{1/2}$
$a_m(t) = \frac{t}{t_0}^{2/3}$
leer
Materie, $\kappa = 0$
Strahlung, $\kappa = 0$
a
$H_0(t - t_0)$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Einfache Universen



Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

$$\Rightarrow H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{H_0^2}{a(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

$$\Rightarrow H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{H_0^2}{a(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

$$\Rightarrow H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_{\omega} \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{H_0^2}{a(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

$$\Rightarrow H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{H_0^2}{a(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}$$

$$\Rightarrow H_0^{-1} = \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0)\right]^{1/2}$$

Realistischere Universen

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

zum Zeitpunkt $t = t_0$ gilt $\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1)$

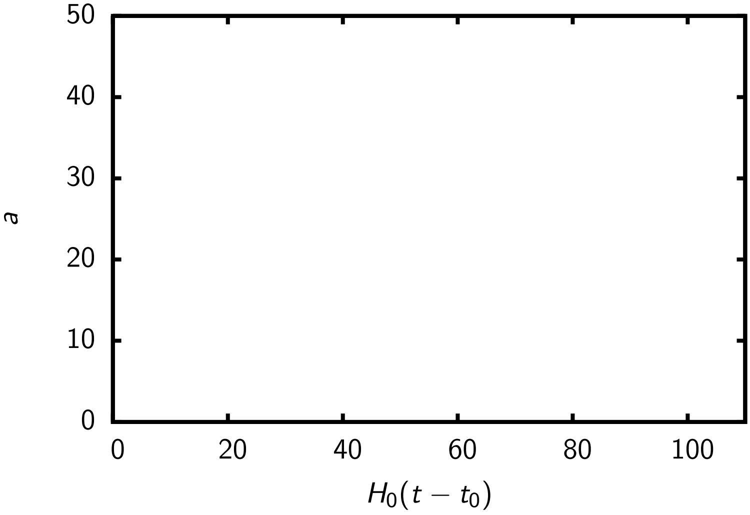
$$\Rightarrow H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\sum_\omega \epsilon_{\omega,0} a^{-1-3\omega} - \frac{H_0^2}{a(t)^2}(\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$$

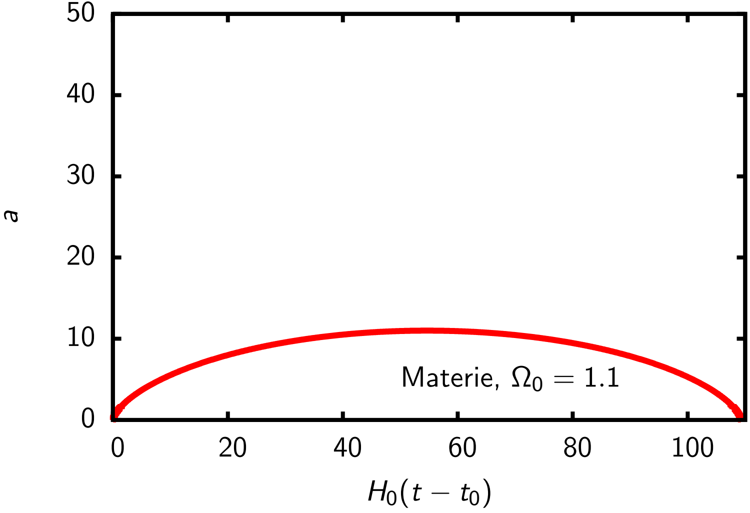
$$\Rightarrow H_0^{-1} = \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1-\Omega_0)\right]^{1/2}$$

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1-\Omega_0)]^{1/2}}$$

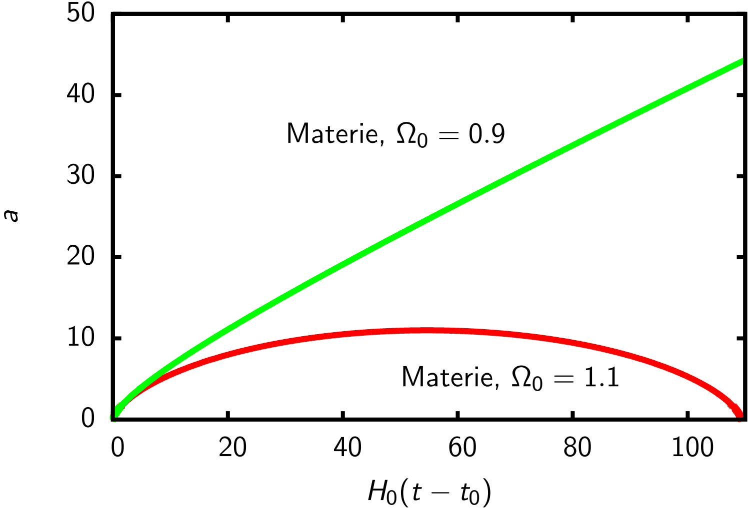
Materie und Krümmung



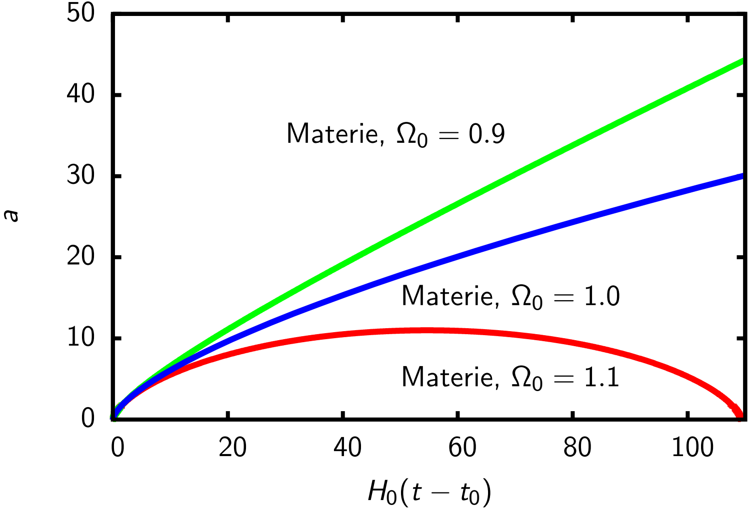
Materie und Krümmung



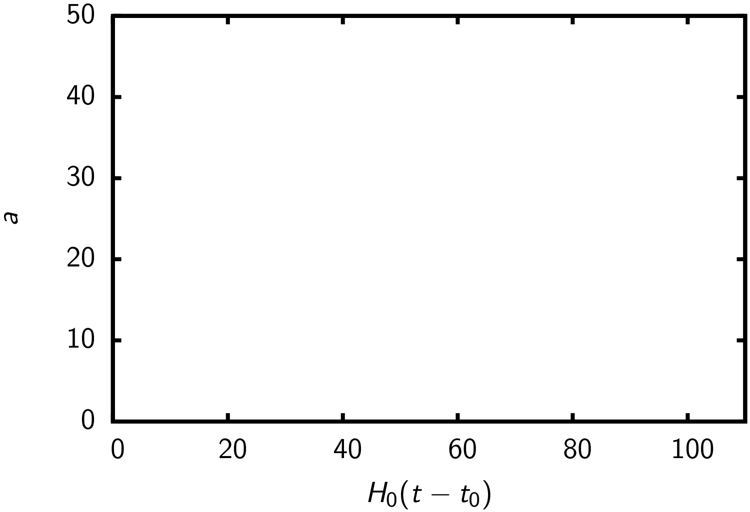
Materie und Krümmung



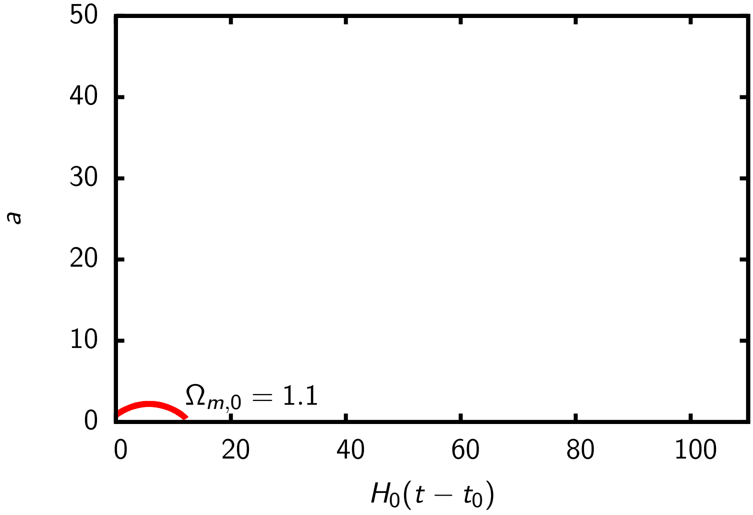
Materie und Krümmung



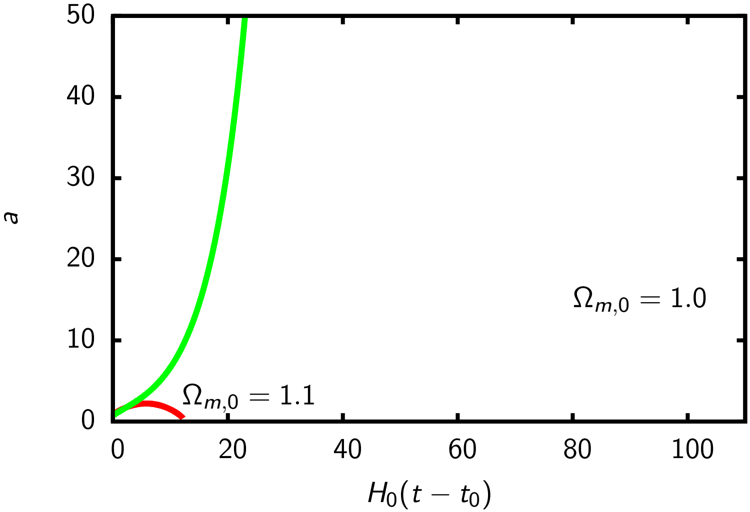
Materie und Λ ($\kappa = 0$)



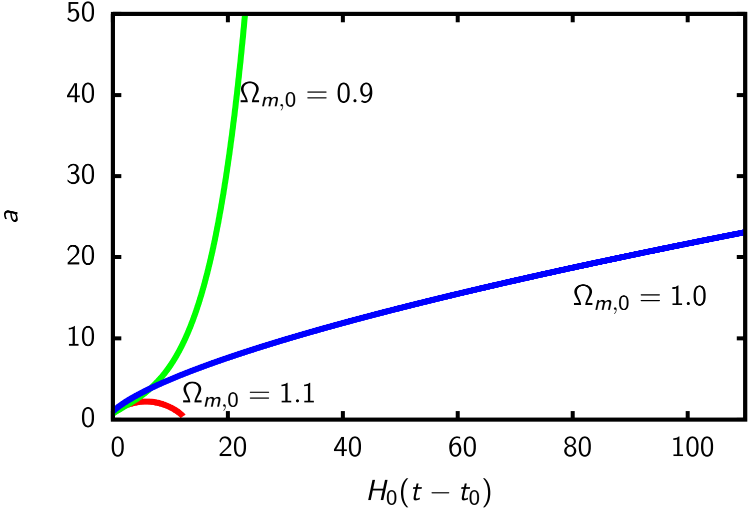
Materie und Λ ($\kappa = 0$)



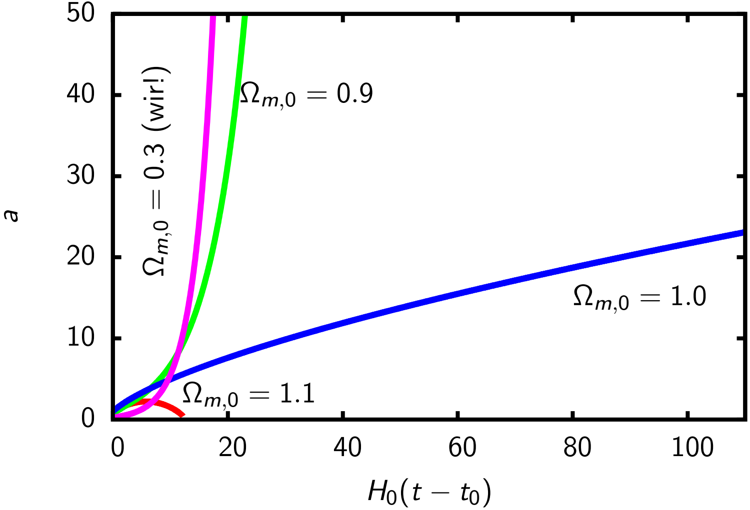
Materie und Λ ($\kappa = 0$)



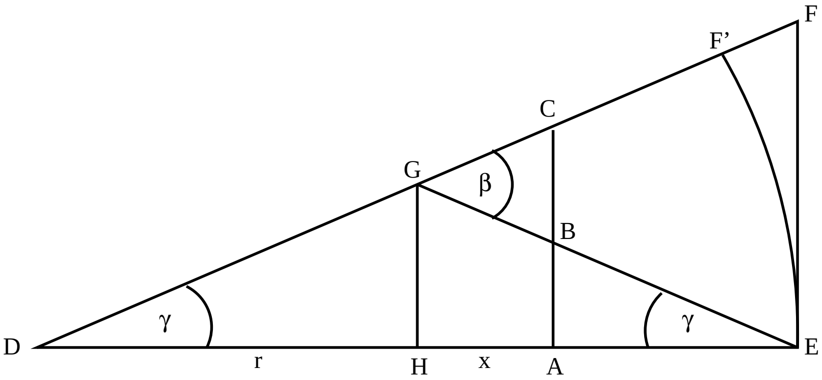
Materie und Λ ($\kappa = 0$)



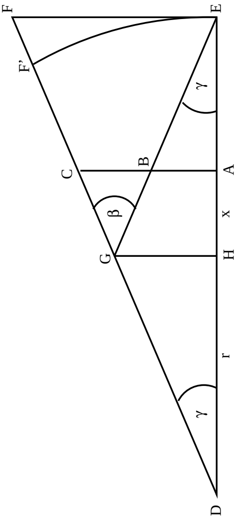
Materie und Λ ($\kappa = 0$)



Motivation der Robertson-Walker Metrik

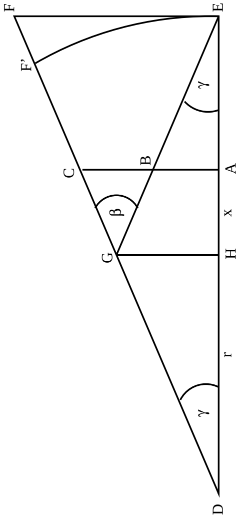


Motivation der Robertson-Walker Metrik



- Räumliche Isotropie impliziert Kugelsymmetrie
- Allgemeines räumliches Linienelement in einem expandierenden Universum $ds = dr^2 + S(r)(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2)$
- für nicht-singuläre Metrik muss gelten $S(r) \approx r$ mit $r \to 0$

Motivation der Robertson-Walker Metrik



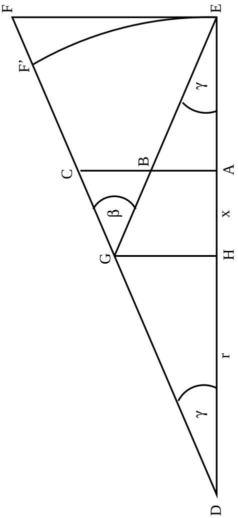
Betrachte $x \to 0$. Es gilt $\sin\gamma \approx \gamma$.

$$EF \approx EF' \approx S(2r)\gamma$$
$$\approx S(r)\beta$$
$$\Rightarrow \beta/\gamma = S(2r)/2S(r)$$

$$AC \approx \gamma S(r+x) \approx AB + BC$$
$$\approx \gamma S(r-x) + \beta S(x)$$

$$S(r+x) - S(r-x) = \beta/\gamma S(x)$$
$$\frac{S(r+x) - S(r-x)}{2x} = \frac{S(2r)}{2S(r)} \cdot \frac{S(x)}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} \Rightarrow \frac{df}{dr} = \frac{S(2r)}{2S(r)}$$

Motivation der Robertson-Walker Metrik



- Einzige Lösung von $dS/dr = S(2r)/2S(r)$ mit $S(r) \approx r$ wenn $r \to 0$ sind r, $\sin(r)$, $\sinh(r)$.
- Daraus folgt: $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[dr^2 + S^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 d\theta^2)]$

Literatur

- B. Ryden: Introduction to Cosmology, Pearson Education.
- A. Liddle: An Introduction to Modern Cosmology, Wiley.
- M. Trodden, S. M. Carroll: The TASI Lectures: Introdcution to Cosmology.